

コラム：確率行列とペロン-フロベニウスの定理

線形代数は経済現象や自然現象において時間変化する事象がどのような状態に近づいていくのかを調べるための道具立てとしても有効である. 実数成分をもつ正方行列 $P = [p_{ij}]$ が確率行列であるとは, p_{ij} が全て 0 以上の実数であり, $\sum_{j=0}^{j=1} p_{ij} = 1$ が全ての i で成り立つことをいう. 例えば,

$$(1) \quad P = \begin{bmatrix} 0.1 & 0.3 & 0.6 \\ 0.4 & 0.3 & 0.3 \\ 0.2 & 0.3 & 0.5 \end{bmatrix}$$

は確率行列である. さて, 次のような事例を考える. A 国は X_1 から X_n までの n 箇所の地方に分かれており, 各 i, j に対して X_i の地域の人口の p_{ij} 倍の人が地域 X_j に移住するとする. このような人口の流れがあるときに, 年を追うにつれて人口の分布がどのように変動してどのような状態に近づいていくかを考えたい. ここで, p_{ij} は毎年変わらず一定であるとして, また A 国の人口総数は変わらないとする. 過去の状態に依存せずに現在の状態のみによって未来の挙動が決定されるこのような確率モデルのことをマルコフ過程という. 上述の人口変動の話はマルコフ過程の一例である.

さて, 今の人口変動の例として, 具体的に $n = 3$ として, p_{ij} を並べた行列が (2) であったとする (例えば, 毎年 X_1 の人口の 0.6 倍が地域 X_3 へ移住する). もし, 地域 X_1, X_2, X_3 の A 国の人口総数に占めるパーセンテージが a_1, a_2, a_3 に近づいて安定するとすると, その極限状態におけるパーセンテージを並べた $\mathbb{R}^3$ の行ベクトル $\boldsymbol{v} = [a_1 \ a_2 \ a_3]$ に行列 P を右からかけても変わらない, つまり $\boldsymbol{v}^t P \boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}$ が成り立つはずである. これはこの $\boldsymbol{v}$ が P の固有値 1 を持つ固有ベクトルであることを意味する. tP は異なる 3 つの固有値 1, -0.1 , 0

を持ち, 固有値 1 の固有ベクトルは, $\begin{bmatrix} 26 \\ 33 \\ 51 \end{bmatrix}$ のスカラー倍である. よって, 地域

X_1, X_2, X_3 の人口比率は時間の経過に従って $(26 : 33 : 51)$ に近づいていくということがわかる.

上の具体例では厳密性に立ち入らずに計算してみたが, 上のようなマルコフ過程の現象での安定化の状況や計算を厳密に保証してくれる次の定理を紹介したい.

定理 [ペロン-フロベニウス]

$A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{R})$ を全ての成分が正の正方行列とする. このとき, A は必ず正の実固有値を持ち, 実固有値の最大値を r とすると, $\min_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^{j=n} a_{ij} \leq r \leq \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^{j=n} a_{ij}$ となり, さらに次が成り立つ. 次のことが成立する.

1. A の r 以外の任意の固有値 λ に対して複素絶対値は $|\lambda| < r$ を満たす.
2. 固有値 r の重複度は 1 である.
3. 全ての成分が正であるような固有値 r の A の固有ベクトル $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ が存在する. 逆に, 全ての成分が正であるような A の固有ベクトルの固有値は r となる.

ペロン-フロベニウスの定理で $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{R})$ を「全ての成分が正」という仮定を「全ての成分が非負」と弱めても結論を若干を弱めた定理が成り立つ. この場合は, A は必ず 0 以上の実固有値を持つが, 実固有値の最大値を r とするとき固有値 r の重複度は 1 とは限らない. 例えば,

$$(2) \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

の固有多項式は $X^2(X-1)^2$ なので固有値 1 の重複度は 1 ではない.

さて, ペロン-フロベニウスの定理を確率行列 $P = (p_{ij})$ に対して適用してみよう. 簡単のために, P の全ての成分は 0 でないと仮定すると上で紹介した強い形のペロン-フロベニウスの定理を適用できる. このとき, $\min_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^{j=n} p_{ij} = \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^{j=n} p_{ij} = 1$ より, $r = 1$ となる. P と tP の固有多項式は等しいのでよって $r = 1$ は tP のただ一つの固有値である. 今, P が先に与えた例のような具体的なマルコフ過程の現象からきているとき, ペロン-フロベニウスの定理の記述 (1) より tP の r 以外の固有値の複素絶対値は全て 1 より真に小さいので, 任意のベクトル $\mathbf{v}$ に対して $({}^tP)^{nt}\mathbf{v}$ は n を無限に飛ばすときにあるベ

クトルへと収束する. つまり, このようなマルコフ過程は時間が無限に経過するとある状態へと必ず安定化することがわかる. その状態が安定した極限状態の割合を与えるベクトルは $\mathbf{1}_P$ をかけても変わらないはずであるから, 固有値 1 の固有ベクトルとなるはずである. ペロン-フロベニウスの定理の記述 (2) より固有値 1 の固有ベクトルは定数倍を除いて丁度ただ一つ存在するので, そのような固有ベクトルを計算することで考えているマルコフ過程がどのような状態に近づいて安定化していくかがわかるのである.

現実には国の人口総数も, ある地域から別の地域への人口の移動割合も, 年によって変わる. また, 完全に安定するまで時刻 t を無限大にすることはできない. ただ, ある程度の誤差を切り捨てることで人口変動の様子を調べることはできるだろう. 固有値, 固有ベクトルを考えること, そしてそれらに関する一般的な定理を学んだり見つけたりすることは抽象的すぎると感じるかもしれない. ただ, このような具体的な問題にも線形代数が役立つのである.