

コラム：行列のスミス標準形

任意の (m, n) 型行列 A は基本変形により

$$\begin{bmatrix} E_r & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

の形の**標準形**に変形できるのであった（定理 2.3.1）．基本変形は左右から基本行列を掛けることと同等であり，基本行列は正則であるから，上の事実，「任意の (m, n) 型行列 A はある m 次正則行列 P と n 次正則行列 Q により

$$PAQ = \begin{bmatrix} E_r & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

となる」とも言い換えられる．ここで，基本変形（特に「ある行や列を（0でない）定数倍する」という操作）が可逆であるためには，スカラー全体の集合が**体**である（特に，0以外の元による割り算が自由にできる）ことが重要である．では体でないものをスカラー全体の集合として採用した場合，何が言えるであろうか？ここでは例として整数全体をスカラー全体の集合として採用した場合を考える．成分が全て整数である行列をここでは**整数行列**と呼ぼう．この場合，基本変形として，ある行や列を勝手な整数（ $\neq 0$ ）倍することを許してしまうと，それは（整数の範囲では）可逆な操作ではなくなってしまう．そこで，定数倍は ± 1 倍のみ許すことにする．他の二つの操作（二つの行・列を交換，ある行・列の整数倍を別の行・列に加える）は整数の範囲でも可逆なので許す．これらを整数の場合の基本変形（ここでは**整基本変形**と呼ぶ）として，次の定理が知られている：

定理 1. 任意の (m, n) 型整数行列 A は整基本変形により

$$\begin{bmatrix} e_1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & e_r & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & \ddots & \end{bmatrix}$$

の形の行列に変形できる．ここで $e_1, \dots, e_r$ は正の整数であり，各番号 i ($1 \leq i < r$) について e_i は e_{i+1} を割り切る．また， $r = \text{rank}(A)$ である．

この行列を A の**スミス標準形**，正整数 $e_1, \dots, e_r$ を A の**単因子**と呼ぶ．線型代数は「体係数」の理論であるが，場合によっては「整数係数」で考えたいこともあり，その様な場合にはこの定理が活躍する．

上の定理を，基本行列を左右から掛ける形で述べると以下の様になる：

定理 2. 任意の (m, n) 型整数行列 A はある m 次整数行列 P と n 次整数行列 Q であって $\det(P) = \pm 1$, $\det(Q) = \pm 1$ なるものにより

$$PAQ = \begin{bmatrix} e_1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & e_r & & \\ & & & 0 & \\ & & & & \ddots \end{bmatrix}$$

となる．ここで $e_1, \dots, e_r$ と r は上と同様である．

これらの定理の証明についてはここでは立ち入ることができないが，体係数の場合は先頭項 a を含む行（列）を a で割って 1 を得られるのに対し，整数係数の場合は単純に「 a で割る」ことができないから，二つの行（列）の間でユークリッドの互除法を用いて，なるべく小さい正整数を得るという方針で変形して行くのがポイントになる．