

問題の略解

問題 1.1

1. $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$, $\mathbf{v}' = \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$ としたときに, 余弦定理によって,

$$\cos \theta = \frac{\|\mathbf{v}\|^2 + \|\mathbf{v}'\|^2 - \|\mathbf{v} - \mathbf{v}'\|^2}{2\|\mathbf{v}\|\|\mathbf{v}'\|}$$

上式の右辺の分子を計算すると,

$$\begin{aligned} \|\mathbf{v}\|^2 + \|\mathbf{v}'\|^2 - \|\mathbf{v} - \mathbf{v}'\|^2 &= (\mathbf{v}, \mathbf{v}) + (\mathbf{v}', \mathbf{v}') - (\mathbf{v} - \mathbf{v}', \mathbf{v} - \mathbf{v}') \\ &= (\mathbf{v}, \mathbf{v}) + (\mathbf{v}', \mathbf{v}') - (\mathbf{v}, \mathbf{v}) + (\mathbf{v}', \mathbf{v}') + (\mathbf{v}, \mathbf{v}') - (\mathbf{v}', \mathbf{v}') \\ &= 2(\mathbf{v}, \mathbf{v}') \end{aligned}$$

となる. ここで最初の等式はベクトルの長さの定義に他ならず, 2 番目と 3 番目の等式は内積の (1), (2), (3) を用いている. かくして, $\cos \theta = \frac{(\mathbf{v}, \mathbf{v}')}{\|\mathbf{v}\|\|\mathbf{v}'\|}$ より欲しい式が示された. \mathbb{R}^3 の数ベクトルに対しても, 内積の (1), (2), (3) が確かめられれば全く同じ計算で欲しい式が示される.

2. 性質 (5) 以外は機械的な計算で確かめられるので性質 (5) のみ確かめたい. 外積ベクトルの具体的な座標表示を用いて,

$$\begin{aligned} \|\mathbf{v} \times \mathbf{v}'\|^2 &= (yz' - y'z)^2 + (zx' - z'x)^2 + (xy' - x'y)^2 \\ &= (yz')^2 + (y'z)^2 + (zx')^2 + (z'x)^2 + (xy')^2 + (x'y)^2 \\ &\quad - 2yy'zz' - 2zz'xx' - 2xx'yy' \end{aligned}$$

を得る. 一方で

$$\begin{aligned}\|\mathbf{v}\|^2\|\mathbf{v}'\|^2|\sin\theta|^2 &= \|\mathbf{v}\|^2\|\mathbf{v}'\|^2(1-\cos^2\theta) \\ &= \|\mathbf{v}\|^2\|\mathbf{v}'\|^2 - (\mathbf{v}, \mathbf{v}')^2 \\ &= (x^2 + y^2 + z^2)\{(x')^2 + (y')^2 + (z')^2\} - (xx' + yy' + zz')^2\end{aligned}$$

であり, これを展開して整理すると, $\|\mathbf{v} \times \mathbf{v}'\|^2 = \|\mathbf{v}\|^2\|\mathbf{v}'\|^2|\sin\theta|^2$ が示される. $\|\mathbf{v} \times \mathbf{v}'\|$, $\|\mathbf{v}\|^2\|\mathbf{v}'\|^2|\sin\theta|$ はともに 0 以上であるから, 性質 (5) の等式 $\|\mathbf{v} \times \mathbf{v}'\| = \|\mathbf{v}\|\|\mathbf{v}'\|\sin\theta$ が示された.

$$3. \quad (1) \quad \mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{bmatrix} -2 \\ -4 \\ -2 \end{bmatrix}, \quad (\mathbf{a}, \mathbf{b} \times \mathbf{c}) = -4.$$

(2) 平面の 2 点 P, Q を通る直線のパラメータ表示は, ベクトル $\mathbf{v} = \overrightarrow{OP}$, $\mathbf{v}' = \overrightarrow{PQ}$ を用いて $\mathbf{v} + s\mathbf{v}'$ と表せる. 今の場合, $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$, $\mathbf{v}' = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$

であるから, パラメータ表示は $\begin{bmatrix} 1+s \\ 3+2s \end{bmatrix}$ で与えられる.

(3) 空間の一般の位置にある 3 点 P, Q, R を通る平面のパラメータ表示は, ベクトル $\mathbf{v} = \overrightarrow{OP}$, $\mathbf{v}' = \overrightarrow{PQ}$, $\mathbf{v}'' = \overrightarrow{QR}$ を用いて, $\mathbf{v} + s\mathbf{v}' + t\mathbf{v}''$ と表

せる. 今の場合, $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{v}' = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}$, $\mathbf{v}'' = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -4 \end{bmatrix}$ であるから, パ

ラメータ表示は $\begin{bmatrix} 1+s+t \\ 1+2s-t \\ 1+4s-4t \end{bmatrix}$ で与えられる.

問題 1.2

1. (1) 線形変換でない ((i) と (ii) のどちらも不成立).
- (2) 線形変換である.
- (3) 線形変換である.
2. $x' = x + 2y$, $y' = 3x + 4y$ とすると, $x = -2x' + y'$, $y = \frac{1}{2}(3x' - y')$ とな

る. よって, $f^{-1}\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} -2x + y \\ \frac{3}{2}x - \frac{1}{2}y \end{bmatrix}$ である.

3. $g \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{ad-bc} \begin{bmatrix} dx - by \\ -cx + ay \end{bmatrix}$ で定まる 1 次変換 $g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ を考える.

このとき, 計算により $g \circ f, f \circ g$ がともに \mathbb{R}^2 上の恒等写像であることが確かめられる. よって, f は逆変換を持つ.

4. $a = b = c = d = 0$ であるとする, f は全てのベクトルを $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ に写す. 特に,

$$\text{逆変換 } f^{-1} \text{ があったとすると } f^{-1} \text{ は 1 次変換であるから } f^{-1} \left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

である. $\mathbf{v} \neq \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ とすると, $f^{-1} \circ f(\mathbf{v}) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ となり, f^{-1} が逆変換である

ことに矛盾する. $ad - bc = 0$ であるが a, b, c, d のいずれかが 0 でないとする.

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} d \\ -c \end{bmatrix}, \mathbf{v}' = \begin{bmatrix} b \\ -a \end{bmatrix} \text{ とおくと, } f(\mathbf{v}) = f(\mathbf{v}') = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ であるが, } \mathbf{v} \neq \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

または $\mathbf{v}' \neq \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ が成り立つので, 上と同様に逆変換 f^{-1} が存在したとすると

矛盾が生ずる. 背理法によって逆変換 f^{-1} が存在しないことが示された.

5. $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ とおくと, \mathbf{u} は H の法線ベクトルとなる. $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ とするとき,

$$(\mathbf{u}, \mathbf{u}) = 1 + 4 + 9 = 14, (\mathbf{u}, \mathbf{v}) = x + 2y + 3z \text{ であるから,}$$

$$f(\mathbf{v}) = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} - \frac{x + 2y + 3z}{7} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \frac{1}{7} \begin{bmatrix} 6x - 2y - 3z \\ -2x + 3y - 6z \\ -3x - 6y - 2z \end{bmatrix}$$

となる. よって $a = \frac{6}{7}, b = -\frac{2}{7}, c = -\frac{3}{7}, d = -\frac{2}{7}, e = \frac{3}{7}, f = -\frac{6}{7}, g = -\frac{3}{7}, h = -\frac{6}{7}, i = -\frac{2}{7}$ となる.

6. 考えている直線 l がベクトル \mathbf{v}, \mathbf{v}' を用いて $\mathbf{v} + s\mathbf{v}'$ (ただし, $\mathbf{v}' \neq \mathbf{0}$) とパラメータ表示を持つとする. f は 1 次変換であることから線形変換である. 今, $f(\mathbf{v}') = f(\mathbf{v}' + \mathbf{v} - \mathbf{v}) = f(\mathbf{v}' + \mathbf{v}) - f(\mathbf{v})$ であるが, $\mathbf{v}' + \mathbf{v}$ と \mathbf{v} はともに直線 l 上のある点に対応するので, $f(\mathbf{v}' + \mathbf{v})$ と $f(\mathbf{v})$ も直線 l 上のある点に対応

する. よって, ある実数 λ が存在して $f(\mathbf{v}') = \lambda \mathbf{v}'$ となる. $\mathbf{v}' = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ とする

と, $\begin{bmatrix} 3x + y \\ 2x + 2y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda x \\ \lambda y \end{bmatrix}$ より, $(3 - \lambda)x + y = 0$ かつ $2x + (2 - \lambda)y = 0$ が成

立する. $\mathbf{v}' \neq \mathbf{0}$ より, この連立 1 次方程式が $x = y = 0$ 以外の解を持つ. よって, $[3 - \lambda : 1] = [2 : 2 - \lambda]$ が成り立つ. これを満たす λ は 1, 4 のみである.

$\lambda = 1$ のとき \mathbf{v}' は $\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$ のスカラー倍である. $\lambda = 4$ のとき \mathbf{v}' は $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ のスカラー倍である.

$\lambda = 1$ のとき, 直線 l はあるベクトル \mathbf{v} を用いて $\mathbf{v} + s \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$ と表せる. \mathbb{R}^2 の

任意のベクトルは, $\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$ のあるスカラー倍と $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ のあるスカラー倍の和で書

けるので, ある c が存在して直線 l は, $\begin{bmatrix} c \\ c \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$ と表せる. 今, $s = 0$ の

ときのベクトル $\begin{bmatrix} c \\ c \end{bmatrix}$ で表せる点 (c, c) は f によって, $(4c, 4c)$ に写されるが, この点 (c, c) が l の上にあるためには $c = 0$ でなければならない. この場合に対応する直線の方程式は $y = -2x$ である.

$\lambda = 4$ のとき, 直線 l はあるベクトル \mathbf{v} を用いて $\mathbf{v} + s \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ と表せる. 上と同

様な理由で, 直線 l は, $\begin{bmatrix} c \\ -2c \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ と表せる. $\begin{bmatrix} c \\ -2c \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ は f によ

って $\begin{bmatrix} c \\ -2c \end{bmatrix} + 4s \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ に写され, c の値に関わらず常にまた l の点に写される. こ

の場合に対応する直線の方程式は $y = x - c$ (c は任意定数) である. 以上より, 題意を満たす直線は, $y = -2x$ で定まる直線, $y = x - c$ (c は任意定数) で定まる直線のいずれかである.

$$1. A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 4 & 8 \\ 4 & 8 & 16 \end{bmatrix}$$

$$2. (1) \text{ 行列の積として定まらないものは } CB, AC \text{ である. } (2) AB = \begin{bmatrix} -1 & 7 \\ 2 & 4 \end{bmatrix},$$

$$BA = \begin{bmatrix} 2 & -5 & 9 \\ 2 & -2 & 6 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}, BC = \begin{bmatrix} 8 & 10 \\ 6 & 8 \\ 4 & 6 \end{bmatrix}, CA = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 6 \\ 7 & 2 & 12 \end{bmatrix}.$$

3. $A = [a_{ij}]$, $B = [b_{jk}]$, $C = [c_{kl}]$ とする. BC が定まることより, B の列の数と C の行の数が等しい. B の列の数と AB の列の数は等しいので積 $(AB)C$ が定まる. AB が定まることより, A の列の数と B の行の数が等しい. B の行の数と BC の行の数は等しいので積 $A(BC)$ が定まる.

A の列の数を m , B の列の数を n とする. $(AB)C = A(BC)$ が成り立つことを示すためには, 任意の (i, l) において, $(AB)C$ の (i, l) 成分と $A(BC)$ の (i, l) 成分が等しいことを示せばよい. (AB) の (i, k) 成分は $\sum_{j=1}^m a_{ij}b_{jk}$ である. よって,

$$(AB)C \text{ の } (i, l) \text{ 成分は } \sum_{k=1}^n (\sum_{j=1}^m a_{ij}b_{jk})c_{kl} = \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^m a_{ij}b_{jk}c_{kl}.$$

一方で, (BC) の (j, l) 成分は $\sum_{k=1}^n b_{jk}c_{kl}$ である. よって, $A(BC)$ の (i, l) 成分

$$\text{は } \sum_{j=1}^m a_{ij} (\sum_{k=1}^n b_{jk}c_{kl}) = \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^n a_{ij}b_{jk}c_{kl} = \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^m a_{ij}b_{jk}c_{kl} = \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^n a_{ij}b_{jk}c_{kl} \text{ より証明が終わる.}$$

4. A, B, C が n 次正方行列であるとする. 任意の (i, k) に対して, $(A+B)C$ の (i, k) 成分は $\sum_{j=1}^n (a_{ij} + b_{ij})c_{jk} = \sum_{j=1}^n a_{ij}c_{jk} + \sum_{j=1}^n b_{ij}c_{jk}$. これは $AC + BC$ の (i, k) 成分に等しいので, $(A+B)C = AC + BC$ が成り立つ. $(A+B)C = AC + BC$ も同様に示される.

5. $A^k = \begin{bmatrix} a^k & ka^{k-1}b \\ 0 & a^k \end{bmatrix}$ となる. これを数学的帰納法で証明する. $k=1$ のときは正しい. $k-1$ まで正しいとしたとき,

$$\begin{aligned} A^k &= A^{k-1}A = \begin{bmatrix} a^{k-1} & (k-1)a^{k-2}b \\ 0 & a^{k-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & a \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} a^k & a^{k-1}b + (k-1)a^{k-1}b \\ 0 & a^k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a^k & ka^{k-1}b \\ 0 & a^k \end{bmatrix} \end{aligned}$$

より証明が終わる.

$$6. (1) p = 2, q = 1. (2) X^{10} = (X^2 + 2X + 1)(X^8 - 2X^7 + 3X^6 - 4X^5 + 5X^4 - 6X^3 + 7X^2 - 8X + 9) - 10X - 9$$

より $A^{10} = (A^2 + 2A + E)(A^8 - 2A^7 + 3A^6 - 4A^5 + 5A^4 - 6A^3 + 7A^2 - 8A + 9E) - 10A - 9E = -10A - 9E =$

$$\begin{bmatrix} 40 & -30 \\ 30 & -20 \end{bmatrix} - 9 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 31 & -30 \\ 30 & -29 \end{bmatrix}.$$

$$7. v = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} \text{ とおくととき, } Av = \mathbf{0} \text{ となる. よって, 1.2 節の問題 4 の解答と同様}$$

の議論で A は逆行列を持ち得ないので正則行列ではない. $C = \frac{1}{10} \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -8 & 6 \end{bmatrix}$

とおくと, $BC = CB = E$ であるから C は B の逆行列となる. よって B は正則行列である.

$$8. A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \text{ とおく. このとき, } AX = \begin{bmatrix} -b & a \\ -d & c \end{bmatrix}, XA = \begin{bmatrix} c & d \\ -a & -b \end{bmatrix} \text{ とな}$$

る. よって, $AX = XA$ が成り立つための必要十分条件は実数 a, b が存在して

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix} \text{ とかけることである.}$$

$$9. (1) (E + A)(E - A + A^2 + \cdots + (-1)^{k-1}A^{k-1}) = E + (-1)^{k-1}A^k, (E - A + A^2 + \cdots + (-1)^{k-1}A^{k-1})(E + A) = E + (-1)^{k-1}A^k. (2) A$$

がべき零行列ならばある正の整数 k が存在して $A^k = O$ となる. このとき, 前小問の計算によって $(E + A)(E - A + A^2 + \cdots + (-1)^{k-1}A^{k-1}) = E - A + A^2 + \cdots + (-1)^{k-1}A^{k-1}(E + A) = E$ となるので, $(E - A + A^2 + \cdots + (-1)^{k-1}A^{k-1})$ は $E + A$ の逆行列となる. よって $E + A$ は正則行列である.

$$10. {}^tB \text{ は型 } (n, m) \text{ の行列, } {}^tA \text{ は型 } (m, l) \text{ の行列であるから積 } {}^tB {}^tA \text{ が定まる. 及び } {}^t(AB) = {}^tB {}^tA \text{ であることを示すには, 任意の } (i, k) \text{ で } AB \text{ の } (i, k) \text{ 成分と } {}^tB {}^tA \text{ の } (k, i) \text{ 成分が等しいことを言えばよい. これは定義通りに計算してすぐに確かめられるので省略する.}$$

$$11. A = [a_{ij}], B = [b_{jk}] \text{ とするとき, } AB \text{ の } (i, i) \text{ 成分は } \sum_{j=1}^n a_{ij}b_{ji} \text{ であるから, } \operatorname{tr}(AB) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij}b_{ji}. \text{ 同様に } \operatorname{tr}(BA) = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n b_{ji}a_{ij} \text{ となる. よって, } \operatorname{tr}(AB) = \operatorname{tr}(BA) \text{ であることが従う.}$$

$$12. \text{ 行列の積の結合法則を用いることで, } (B^{-1}A^{-1})(AB) = B^{-1}(A^{-1}A)B =$$

$B^{-1}B = E$ となる. 同様に $(AB)(B^{-1}A^{-1}) = E$ となるので $B^{-1}A^{-1}$ は AB の逆行列となる. これによって, $(A_1 \cdots A_k)^{-1} = A_k^{-1} \cdots A_1^{-1}$ は $k=2$ で正しい. 一般の k に対しても数学的帰納法により正しいことが示されるが詳細は省略する.

13. 与えられた M に対して, $A = \frac{1}{2}(M + {}^tM)$, $B = \frac{1}{2}(M - {}^tM)$ とおくと, ${}^t({}^tM) = M$ であることより, A は対称行列, B は交代行列となる. また, $M = A + B$ となるので題意が従う.

問題 2.2

1. (1) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ (2) 1 列目の 1 倍と 2 列目の -2 倍を 3 列目に加えればよい.
2. $A = E_4(3; s)E_4(2, 4)E_4(3, 1; t)$ なので, 問題 2.1.12 より, $A^{-1} = E_4(3, 1; t)^{-1}E_4(2, 4)^{-1}E_4(3; s)^{-1}$ となる. $E_4(3, 1; t)^{-1} = E_4(3, 1; -t)$, $E_4(2, 4)^{-1} = E_4(2, 4)$, $E_4(3; s)^{-1} = E_4(3; s^{-1})$ より, $A^{-1} = E_4(3, 1; -t)E_4(2, 4)E_4(3; s^{-1})$.
3. A は n 次正方行列であるとする. A に k 回の行基本変形を施すことで $\begin{bmatrix} A' \\ 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$ に変換できたとし, i 回目の行基本変形が基本行列 A_i を左から掛けることで得られるとする ($i = 1, \dots, k$). このとき, $A_k \cdots A_1 A = \begin{bmatrix} A' \\ 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$ となる. A が逆行列を持たないことを背理法で証明するために, A が逆行列を持つと仮定する. 基本行列は必ず逆行列を持つので, 先の式の両辺に右から $A^{-1}, A_1^{-1}, \dots, A_k^{-1}$ を順に掛けると, $E_n = \begin{bmatrix} A' \\ 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} A^{-1} A_1^{-1} \cdots A_k^{-1}$ を得る. 最後の行が全て 0 であるような行列に右からどのような行列を掛けても得られる行列の最後の行が全て 0 であるから, $E_n = \begin{bmatrix} A'' \\ 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$ なる式が得られる. 単位行列 E_n の n 行目は 0 ではない成分を持つので矛盾が生じる. かくして A が逆行列を持たない.
4. (1) A が (m, n) 型の行列であるとする. A に k 回の行基本変形を施すことで A' に変換されたとして, i 回目の行基本変形が基本行列 A_i を左から掛けることで得られるとする ($i = 1, \dots, k$). $A' = A_k \cdots A_1 A$ であるから, 行列の積のブロック分解により, $B' = A_k \cdots A_1 B$, $C' = A_k \cdots A_1 C$ となる. 基本行

列を左から掛けることで生じる変化は行基本変形に他ならないので、 B' , C' はそれぞれ B , C に基本変形を施すことで得られる。

(2) A が (m, n) 型の行列であるとする。 A に k 回の列基本変形を施すことで A' に変換される。 各列基本変形は基本行列 A_i を右から掛けることで得られる。 よって、前小問の解答の議論の行基本変形を列基本変形に置き換えて、左から掛ける操作を右から掛ける操作に置き換えることで、全く同様の議論で欲しい記述を示すことができる (詳細は省略)。

問題 2.3

1. (1) A は行簡約である。 B は、 $(1,3)$ 成分が 0 でないので定義 2.3.2 (1) の条件 (iv) が成立せず、行簡約ではない。 (2) A は 3 列目に 0 でない成分があるのに 2 列目の成分は全て 0 なので定義 2.3.2 (2) の条件 (i) が成立せず列簡約ではない。 B は列簡約である。

2. (1) A, B, C の行簡約化を A', B', C' とするとき、 $A' = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$,

$$B' = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, C' = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 5 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

(2) A, B, C の列簡約化を A'', B'', C'' とするとき、 $A'' = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$,

$$B'' = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, C'' = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{5}{7} & \frac{13}{7} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{7} & \frac{4}{7} & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

(3) A, B, C の標準化を A''', B''', C''' とするとき、 $A''' = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$,

$$B''' = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, C''' = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

3. $\text{rank} A = 1$ となるための必要十分条件は $a = b = d = 0$ であること. $\text{rank} A = 2$ となるための必要十分条件は $ad = 0$ かつ a, b, d のうちのいずれかが 0 でないこと. $\text{rank} A = 3$ となるための必要十分条件は $ad \neq 0$ であること.

問題 2.4

1. 例題 2.4.5 の方法に従って計算すればよい. (1) $x_1 = 1, x_2 = -4, x_3 = -8$
 (2) $x_1 = 7 - s, x_2 = -2 - s, x_3 = s, x_4 = -1$ (s はパラメータ) (3)
 $x_1 = -1 + s + t, x_2 = 1 - 2s - t, x_3 = s, x_4 = t$ (s, t はパラメータ)

2. 考えている連立 1 次方程式に対応する係数行列 A は $\begin{bmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{bmatrix}$, 拡大係数

行列 \tilde{A} は $\begin{bmatrix} 1 & a & a^2 & a^3 \\ 1 & b & b^2 & b^3 \\ 1 & c & c^2 & c^3 \end{bmatrix}$ である. 定理 2.4.2 より唯一つの解をもつための

必要十分条件は $\text{rank}(A) = 3$ となることである. A に行と列の基本変形を施

すと $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & b-a & 0 \\ 0 & c-a & (c-a)(c-b) \end{bmatrix}$ となるので, $\text{rank}(A) = 3$ となるための必

要十分条件は $(a-b)(b-c)(c-a) \neq 0$ となることである. よって, 唯一つの解をもつための必要十分条件は $(a-b)(b-c)(c-a) \neq 0$ が成り立つことである. そのときの唯一の解は, $x = abc, y = -(ab + bc + ca), z = a + b + c$.

3. 考えている行列方程式は各成分に着目することで次の連立 1 次方程式に言い換えられる.

$$\begin{cases} x_1 + 5x_2 - 2x_3 = 1 \\ 3x_1 + x_2 + x_3 = 2 \\ -2x_1 + x_2 - x_3 = 3 \end{cases}$$

この連立 1 次方程式の解は $x_1 = -\frac{25}{7}, x_2 = \frac{30}{7}, x_3 = \frac{59}{7}$ となる.

4. 例題 2.4.7 に従って計算する. $\tilde{A} = [A \quad \mathbf{b}]$ と定めると

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & -2 & -1 & 2 \\ -1 & 7 & 5 & -1 & -2 & -2 \\ 2 & 3 & 0 & 5 & 1 & -2 \\ 4 & -4 & 1 & -5 & -1 & 8 \end{bmatrix}$$

となる. \tilde{A} の行簡約化 $\tilde{A}' = [A' \quad \mathbf{b}']$ は $\tilde{A}' = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{7}{13} & \frac{2}{13} & \frac{8}{13} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{17}{13} & \frac{3}{13} & -\frac{14}{13} \\ 6 & 0 & 1 & -\frac{25}{13} & -\frac{9}{13} & \frac{16}{13} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

で与えられる. $\text{rank}(A) = 3$ より, 解は $5 - 3 = 2$ 個のパラメータで表示される.

\tilde{A}' における先頭項を含まない列ベクトルは, 4 列目とのベクトル $\mathbf{a}'_4 = \begin{bmatrix} \frac{7}{13} \\ \frac{17}{13} \\ -\frac{25}{13} \\ 0 \end{bmatrix}$

と 5 列目とのベクトル $\mathbf{a}'_5 = \begin{bmatrix} \frac{2}{13} \\ \frac{3}{13} \\ -\frac{9}{13} \\ 0 \end{bmatrix}$ のみである. また, 定理 2.4.6 の証明

の記号を用いると, $\mathbf{w} = F(\overline{\mathbf{b}'}) = \begin{bmatrix} \frac{8}{13} \\ -\frac{14}{13} \\ \frac{16}{13} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\mathbf{v}_1 = \mathbf{e}_4 - F(\overline{\mathbf{a}'_4}) = \begin{bmatrix} -\frac{7}{13} \\ -\frac{17}{13} \\ \frac{25}{13} \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$,

$\mathbf{v}_2 = \mathbf{e}_5 - F(\overline{\mathbf{a}'_5}) = \begin{bmatrix} -\frac{2}{13} \\ -\frac{3}{13} \\ \frac{9}{13} \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ である. よって, 行列方程式 $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ の解は 2 つ

のパラメータ s, t によって $\mathbf{x} = s \begin{bmatrix} -\frac{7}{13} \\ -\frac{17}{13} \\ \frac{25}{13} \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} -\frac{2}{13} \\ -\frac{3}{13} \\ \frac{9}{13} \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{8}{13} \\ -\frac{14}{13} \\ \frac{16}{13} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ と表される.

5. $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ の任意の解 $\mathbf{y} \in K^n$ をとり, $\mathbf{y}' = \mathbf{y} - \mathbf{w}$ とおく. このとき, $A\mathbf{y}' = A\mathbf{y} - A\mathbf{w} = \mathbf{b} - \mathbf{b} = \mathbf{0}$. よって, \mathbf{y}' は行列方程式 $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ の解となる. 逆に, \mathbf{y}' を行列方程式 $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ の任意の解として, $\mathbf{y} = \mathbf{y}' + \mathbf{w}$ とおく. このとき, $A\mathbf{y} = A\mathbf{y}' + A\mathbf{w} = \mathbf{0} + \mathbf{b} = \mathbf{b}$. よって, \mathbf{y} は行列方程式 $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ の解となる.

問題 2.5

1. (1) A は 1 回目に ② \rightarrow ② + ① \times (-3), 2 回目に ② \rightarrow ① \times ($-\frac{1}{2}$), 3 回目に ① \rightarrow ① + ② \times (-2) を施すことで, 単位行列 E_2 に変換される.

(2) 1 回目の行基本変形は基本行列 $A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$ を左から掛けることで得

られる. 2 回目の行基本変形は基本行列 $A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$ を左から掛けること

で得られる. 3 回目の行基本変形は基本行列 $A_3 = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ を左から掛ける

ことで得られる.

(3) 前小問の A_1, A_2, A_3 を取ると $A_3 A_2 A_1 A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ となる. よって, $A =$

$A_1^{-1} A_2^{-1} A_3^{-1}$ となる. $A_1^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$, $A_2^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$, $A_3^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

なので $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

2. (1) $\tilde{A} = [A \ E_2] = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ の行簡約化 \tilde{A}' は $\tilde{A}' = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & -5 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$

となる. よって $A^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$ となる.

$$(2) A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{8}{3} & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ \frac{1}{3} & -\frac{5}{3} & -1 \end{bmatrix}, (3) A^{-1} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 2 & 4 & 0 & -2 \\ -8 & -11 & 2 & 11 \\ 8 & 10 & -2 & -10 \\ 18 & 23 & -4 & -23 \end{bmatrix}$$

3. n 次正方行列 A が正則であるとする. A が零因子でないことを背理法を示すために, A が零因子であるとする. もし $AB = O$ となる零行列でない n 次正方行列 B が存在したとすると, 両辺に逆行列 A^{-1} を左から掛けると, 左辺は $A^{-1}(AB) = (A^{-1}A)B = EB = B$, 右辺は $A^{-1}O = O$ よって, 等式 $B = O$ を得るが B は B が零行列でないことに矛盾. $BA = O$ となる零行列でない n 次正方行列 B が存在したとするとともに同様に矛盾が起こるので, A は零因子ではない.

n 次正方行列 A が零因子でないならば正則であることを示すために, 対偶命題として A が正則でないならば n 次正方行列 A が零因子であることを示す. A が正則でないならば命題 2.5.4 より, $\text{rank} A < n$ である. よって, いくつかの基本行列 A_1, \dots, A_k を掛けることで $A_k \cdots A_1 A$ の n 行目の成分は全て 0 となる. 今, B' を 1 列目から $n-1$ 列目までは全て 0 であり, n 列目は零ベクトルでないような n 次正方行列とすると, $B = B' A_k \cdots A_1$ とおくと $BA = B' A_k \cdots A_1 A = O$ となる. 今, A_1, \dots, A_k の逆行列 $A_1^{-1}, \dots, A_k^{-1}$ を B に右から順に掛けることで, $BA_1^{-1} \cdots A_k^{-1} = B' A_k \cdots A_1 A_1^{-1} \cdots A_k^{-1} = B'$ となり, B' は零行列でないので B も零行列でない. よって, A は零因子であることが示された.

問題 3.1

1. (1) -1 (2) -1 (3) 1
2. (1) 11 (2) 19 (3) $x^2 + y^2$
3. (1) 35 (2) -1 (3) $-bc$
4. $x = 1, 2$
5. (1) $1, \sigma(1), \sigma^2(1), \dots$ を考えると, ある $i < j$ があって $\sigma^i(1) = \sigma^j(1)$ となる. 逆置換 σ^{-i} を掛けて $\sigma^{j-i}(1) = 1$ である. こうして正整数 k であって $\sigma^k(1) = 1$ を満たすものが存在する. そのような正整数で最小のものを m とする. $a_1 = 1, a_2 = \sigma(1), \dots, a_m = \sigma^{m-1}(1)$ とおけば, $\sigma(a_i) = a_{i+1}$ ($1 \leq i \leq m-1$), $\sigma(a_m) = a_1$ を満たすから, σ は a_1, \dots, a_m に対し巡回置換を引き起こす. 次に $b \in \{1, 2, \dots, n\} \setminus \{a_1, \dots, a_m\}$ を任意にとり, $b, \sigma(b), \sigma^2(b), \dots$ を考えると, どのような議論から, $\sigma^l(b) = b$ を満たす最小の正整数 l を取ることができて, $b_i = \sigma^{i-1}(b)$ とおけば, σ は b_1, \dots, b_l に対し巡回置換を引き起こす. また集合 $\{a_1, \dots, a_m\}$ と $\{b_1, \dots, b_l\}$ は交わらない (もし $a_i = b_j$ とすると

$\sigma^i(1) = \sigma^j(b) \iff b = \sigma^{i-j}(1)$ となって b の取り方に矛盾するから). 次に $c \in \{1, 2, \dots, n\} \setminus (\{a_1, \dots, a_m\} \cup \{b_1, \dots, b_l\})$ を任意にとり, 同じ議論を行う. 以下これを繰り返すと最終的に問題にあるような集合の分割が得られる.

(2) $(k_1, k_2, \dots, k_m) = (k_1, k_m) \cdots (k_1, k_3)(k_1, k_2)$ (3) 互換の符号は -1 なので, (2) より長さ m の巡回置換の符号は $(-1)^{m-1}$ である.

$$6. (\sigma\tau\sigma^{-1})^n = \sigma\tau \underbrace{\sigma^{-1} \cdot \sigma}_{\varepsilon} \tau \underbrace{\sigma^{-1} \cdot \sigma}_{\varepsilon} \tau \sigma^{-1} \cdots \tau \sigma^{-1} = \sigma\tau^n\sigma^{-1}.$$

問題 3.2

- (1) -1 (2) $-x - x^2 + y + y^2$ (3) 0 (4) -330 (5) $-abc$ (6) $9abc$ (7) 16 (8) -126
- (1) $-6d$ (2) $-d$ (3) d (4) $15d$
- (1), (2), (3) の条件から, 写像 D は行簡約な n 次行列 B についての値 $D(B)$ によって定まる. $D'(A) = \det(A)D(E)$ とおくと, これも (1), (2), (3) の条件を満たすことから, 行簡約な n 次行列 B についての値 $D'(B)$ によって定まる. B の階数が $n-1$ 以下のときは, 最下段の行ベクトルが零だから, (3) によって $D(B) = D'(B) = 0$ である. B の階数が n のときは, $B = E$ であるから, やはり $D(E) = D'(E)$ である. よって $D = D'$ である.

問題 3.3

- (1) -16 (2) 120
- $\det(A) = 1$ (右辺の 3 つの行列の行列式はそれぞれ 1 であることから分かる).
- (1) $\det(AB) = \det(A)\det(B)$ を使って, k についての帰納法で $\det(A^k) = (\det A)^k$ を示す. (2) n 次正方行列について, 階数が n であることと正則行列であることは同値である. よって $\text{rank}(A) = n \iff \det(A) \neq 0 \iff \det(A^k) \neq 0 \iff \text{rank}(A^k) = n$.
- (1) ${}^tI = -I$ より $\det({}^tI) = \det(-I) \iff \det(I) = (-1)^n \det(I)$ である. $I^2 = -E$ なので, $\det(I) \neq 0$. よって n は偶数でなくてはならない.
 (2) $n = 2k$ とおく. $(xE + yI)(xE + y{}^tI) = (xE + yI)(xE - yI) = x^2E - y^2I^2 = (x^2 + y^2)E$ なので $\det(xE + yI)^2 = (x^2 + y^2)^{2k}$ である. $f(x, y) = \det(xE + yI)$ とおくと, これは x, y を変数とする複素数係数の多項式である. よって $\det(xE + yI)^2 = (x^2 + y^2)^{2k} \iff (f(x, y) - (x^2 + y^2)^k)(f(x, y) + (x^2 + y^2)^k) = 0$ であり, これが x, y を変数とする多項式についての等号となっていることから, どちらか一方の項は恒等的に 0 でなくてはならない. $(x, y) = (1, 0)$ のとき, $f(1, 0) = \det(E) = 1$ であることから, $f(x, y) + (x^2 + y^2)^k$ は恒等的に 0 でない多項式である. よって $f(x, y) - (x^2 + y^2)^k = 0 \iff \det(xE + yI) = (x^2 + y^2)^k$ である.

5. (1) 正しくない. $\det(-A) = (-1)^n \det(A)$ が正しい. (2) 正しくない. 反例として, ひとつの行が零ベクトルである行列など. (3) 正しくない. $A = E$, $B = xE$ とすると, $\det(A+B) = (1+x)^n$ だが, $\det(A) + \det(B) = 1+x^n$ となって反例を与える.

問題 3.4

1.

$$(1) \quad - \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} -5 \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} +4 \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} \quad (2) \quad -4 \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} +7 \begin{vmatrix} 0 & 9 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} -4 \begin{vmatrix} 0 & 9 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}$$

2.

$$(1) \quad \begin{bmatrix} 6 & -9 \\ 3 & 7 \end{bmatrix} \quad (2) \quad \begin{bmatrix} \sqrt{5} & -\sqrt{2} \\ -\sqrt{3} & 1 \end{bmatrix} \quad (3) \quad \begin{bmatrix} -6 & 0 & 0 \\ -2 & 15 & -9 \\ 2 & -6 & 0 \end{bmatrix}$$

$$(4) \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 19 \\ 0 & 0 & -8 \end{bmatrix} \quad (5) \quad \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$3. \quad \frac{1}{x^3 - x} \begin{bmatrix} x^2 & 0 & -x \\ 1 - x^2 & x^2 - 1 & 1 - x^2 \\ -x & 0 & x^2 \end{bmatrix}$$

4. (1) $\det(A)$ を a_{ij} を変数とする多項式とみなす. このとき, $\det(\tilde{A})$ も a_{ij} を変数とする多項式である. $A\tilde{A} = (\det A)E$ より, 多項式としての等号 $\det(A)\det(\tilde{A}) = (\det A)^n$ を得る. $\det(A)$ は恒等的に 0 でないから, 多項式としての等号 $\det(\tilde{A}) = (\det A)^{n-1}$ が従う. 多項式として等しいので, 各 a_{ij} に任意の K の元を代入しても等号が成立する.

(2) B を \tilde{A} の余因子行列とする. B の各成分もまた a_{ij} を変数とする多項式とみなす. このとき, $B\tilde{A} = (\det \tilde{A})E$ であるが, (1) の結果から右辺は $(\det A)^{n-1}E$ である. よって $B\tilde{A} = (\det A)^{n-1}E$ であるが, さらに右から A をかけて $(\det A)B = (\det A)^{n-1}A$ が成り立つ. $\det(A)$ は恒等的に 0 でないから, 多項式を成分とする行列として, $B = (\det A)^{n-2}A$ が成り立つ. よって任意の K の元を代入しても等号が成立する.

5. $\begin{vmatrix} A & O \\ * & B \end{vmatrix}$ の第 1 行についての余因子展開を考えれば, A が $n-1$ 次正方行列である場合に帰着できる. $\begin{vmatrix} A & * \\ O & B \end{vmatrix}$ の場合は第 1 列についての余因子展開を考えればよい.

問題 3.5

- (1) 9 (2) 9^n
- (1) 定義通りに計算すればよい. 以下略.
(2) (1) より, $A\tilde{A} = O \iff (\mathbf{x}, \mathbf{x} \times \mathbf{y}) = (\mathbf{y}, \mathbf{x} \times \mathbf{y}) = 0$ である.
- $d = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix}$ とおくと, 1 行についての余因子展開によって, $d = (\mathbf{x}, \mathbf{y} \times \mathbf{z})$ を得る. 同様に, 2 行, 3 行についての余因子展開によって, $d = (\mathbf{y}, \mathbf{z} \times \mathbf{x})$ および $d = (\mathbf{z}, \mathbf{x} \times \mathbf{y})$ に等しいことを得る.

問題 4.1

- \mathbf{z} が零ベクトル $\mathbf{0}$ と同じ性質を持つとすると $\mathbf{z} = \mathbf{z} + \mathbf{0} = \mathbf{0}$.
 $\mathbf{x} \in V$ に対し, \mathbf{y} が $-\mathbf{x}$ と同じ性質を持つとすると $\mathbf{y} = \mathbf{y} + \mathbf{0} = \mathbf{y} + \mathbf{x} + (-\mathbf{x}) = \mathbf{0} + (-\mathbf{x}) = -\mathbf{x}$.
 $0\mathbf{x} = (0+0)\mathbf{x} = 0\mathbf{x} + 0\mathbf{x}$. 両辺に $0\mathbf{x}$ の逆ベクトルを足して $0\mathbf{x} = \mathbf{0}$.
 $\mathbf{x} + (-1)\mathbf{x} = 1\mathbf{x} + (-1)\mathbf{x} = (1+(-1))\mathbf{x} = 0\mathbf{x} = \mathbf{0}$, よって $(-1)\mathbf{x}$ は \mathbf{x} の逆ベクトル.
- (1) W_1 はスカラー倍について閉じていないから部分空間ではない. W_2 は $\mathbf{0}$ を含まないし, 和についてもスカラー倍についても閉じていないから部分空間ではない.
(2) W_1 と W_2 は部分空間である. W_3 と W_5 は $\mathbf{0}$ を含まないから部分空間ではない. W_4 は和について閉じていないから部分空間ではない.
- $\mathbf{x} = x_1\mathbf{a}_1 + x_2\mathbf{a}_2 = x_3\mathbf{a}_3 + x_4\mathbf{a}_4$ ($x_i \in K$) と表せるベクトル全体を求めればよい. これを連立一次方程式と見做して解くと, 共通部分は, $ab \neq 2$ のとき $\{\mathbf{0}\}$, $ab = 2$ のとき $\left\langle \begin{bmatrix} 2 & -b & 2 & -b \end{bmatrix} \right\rangle_K$.
- $W_1 \cup W_2$ が部分空間とすると, 任意の $\mathbf{x}_i \in W_i$ に対し $\mathbf{y} = \mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2 \in W_1 \cup W_2$. もし $\mathbf{y} \in W_1$ とすると $\mathbf{x}_2 = \mathbf{y} - \mathbf{x}_1 \in W_1$, 故に $W_2 \subset W_1$. もし $\mathbf{y} \in W_2$ とすると同様に $W_1 \subset W_2$ となる.

$W_1 \subset W_2$ と仮定すると $W_1 \cup W_2 = W_2$ となり, これは部分空間. $W_2 \subset W_1$ の場合も同様.

5. $\begin{bmatrix} \mathbf{a}_1 & \cdots & \mathbf{a}_n \end{bmatrix} P = \begin{bmatrix} \mathbf{b}_1 & \cdots & \mathbf{b}_n \end{bmatrix}$ より各 \mathbf{b}_j は $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n$ の線形結合だから $\langle \mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n \rangle \supset \langle \mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_n \rangle$. P が正則ならば $\begin{bmatrix} \mathbf{a}_1 & \cdots & \mathbf{a}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{b}_1 & \cdots & \mathbf{b}_n \end{bmatrix} P^{-1}$ だから, 同様にして $\langle \mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n \rangle \subset \langle \mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_n \rangle$ も成り立ち, これらは一致する.

問題 4.2

- 例題 4.2.20 と同様に計算すると, $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_5$ が独立で, $\mathbf{a}_2 = 2\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_4 = 3\mathbf{a}_1 + 4\mathbf{a}_3$.
- 4 次正方形行列 A を用いて $(\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \mathbf{y}_3, \mathbf{y}_4) = (\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3, \mathbf{x}_4)A$ と書くと, (1), (2) のいずれの場合も $\text{rank}(A) = 4$, 即ち A の 4 つの列は線形独立 (系 4.2.18), 従って定理 4.2.15 により $(\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \mathbf{y}_3, \mathbf{y}_4)$ も線形独立である. A は正則で, $(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3, \mathbf{x}_4) = (\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \mathbf{y}_3, \mathbf{y}_4)A^{-1}$ より
 - $\mathbf{x}_1 = \mathbf{y}_1, \mathbf{x}_2 = -\mathbf{y}_1 + \mathbf{y}_2, \mathbf{x}_3 = -\mathbf{y}_2 + \mathbf{y}_3, \mathbf{x}_4 = -\mathbf{y}_3 + \mathbf{y}_4$.
 - $\mathbf{x}_1 = (-2\mathbf{y}_1 + \mathbf{y}_2 + \mathbf{y}_3 + \mathbf{y}_4)/3, \mathbf{x}_2 = (\mathbf{y}_1 - 2\mathbf{y}_2 + \mathbf{y}_3 + \mathbf{y}_4)/3,$
 $\mathbf{x}_3 = (\mathbf{y}_1 + \mathbf{y}_2 - 2\mathbf{y}_3 + \mathbf{y}_4)/3, \mathbf{x}_4 = (\mathbf{y}_1 + \mathbf{y}_2 + \mathbf{y}_3 - 2\mathbf{y}_4)/3$.
- O が三角錐 $ABCD$ の内部に含まれるとき, $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d}$ のどの三つも同一平面上にない (さもなくば O は $ABCD$ のある面上に存在する). よってそれらは線形独立である. 作図法は省略する.
- (1) $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n$ が関係式 $c_1\mathbf{a}_1 + \cdots + c_n\mathbf{a}_n = \mathbf{0}$ を満たすということは, すべての i に対し \mathbf{a}_j の第 i 成分 a_{ij} たちが同じ関係式 $c_1a_{i1} + \cdots + c_na_{in} = 0$ を満たすことと同値である. 従って $\mathbf{a}'_1, \dots, \mathbf{a}'_n$ も同じ関係式を満たす.
 - $m = n = 2, r = 1, i_1 = 1, \mathbf{a}_1 = {}^t \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{a}_2 = {}^t \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}$, とすると,
 $\mathbf{a}'_1 - \mathbf{a}'_2 = \mathbf{0}$ だが $\mathbf{a}_1 - \mathbf{a}_2 \neq \mathbf{0}$.

問題 4.3

- $\dim(\mathbb{R}[x]_3) = 4$ であるから, 定理 4.3.20 より, この組が線形独立であること, または, $\mathbb{R}[x]_3$ を生成することの一方のみを示せばよい. 例えば, $a + bx + cx(x-1) + dx(x-1)(x-2) = 0$ が x の恒等式となる実数 a, b, c, d は $a = b = c = d = 0$ に限ることから, 前者が成り立つことが分かる. また,

$$x^3 = x + 3x(x-1) + x(x-1)(x-2) \text{ より, 求める座標は } \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

2. (1) 例えば, 組 $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ は V の基底であり,
 $\dim(V) = 4$.

(2) V の任意の多項式は, ある実数 a, b を用いて, $(ax+b)(x-2)(x+1)$ の形に一意的に表される. 例えば, 組 $(x-2)(x+1), x(x-2)(x+1)$ は V の基底であり, $\dim(V) = 2$.

(3) V の任意の数列は初項と第二項の値によって一意的に決まる. 数列 $(a_n), (b_n)$ を, n が奇数のとき, $a_n = 2^{n-1}, b_n = 0, n$ が偶数のとき, $a_n = 0, b_n = 2^{n-2}$ によって定めると, 例えば, 組 $(a_n), (b_n)$ は V の基底であり, $\dim(V) = 2$.

3. (1) 与式の係数行列は行基本変形によって $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$ に変形される. こ

れより, $\dim(W) = 1$ であり, 例えば, $\begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ は W の基底である.

- (2) 与式の係数行列は行基本変形によって $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ に変形される.

これより, $\dim(W) = 2$ であり, 例えば, 組 $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ は W の基

底である.

4. 行列 $\begin{bmatrix} \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 & \mathbf{a}_3 & \mathbf{b}_1 & \mathbf{b}_2 \end{bmatrix}$ は行基本変形によって $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -4 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -3 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

に変形される. これより, $\dim(W_1 + W_2) = 3$ であり, 例えば, $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{b}_1$ は $W_1 + W_2$ の基底である. ($W_1 + W_2 = \mathbb{R}^3$ であるから, \mathbb{R}^3 の標準基底を

選ぶこともできる。) また, $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2$ は W_1 の基底であり, $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2$ は W_2 の基底であるので, $\dim W_1 = \dim W_2 = 2$. よって, $\dim(W_1 \cap W_2) = \dim W_1 + \dim W_2 - \dim(W_1 + W_2) = 1$. さらに, 上の計算より, $\mathbf{b}_2 = -\mathbf{a}_1 - \mathbf{a}_2 + \mathbf{b}_1$

が得られるので, 例えば, $\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2 = \mathbf{b}_1 - \mathbf{b}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}$ は $W_1 \cap W_2$ の基底

である.

5. $\mathbf{w}_{m+1}, \dots, \mathbf{w}_n$ は $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_m$ の線形結合として表されるので,
 $\langle \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_m, \mathbf{v}_{m+1} + \mathbf{w}_{m+1}, \dots, \mathbf{v}_n + \mathbf{w}_n \rangle = \langle \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_m, \mathbf{v}_{m+1}, \dots, \mathbf{v}_n \rangle = V$. $\dim(V) = n$ であるので, 定理 4.3.20 より, 組 $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_m, \mathbf{v}_{m+1} + \mathbf{w}_{m+1}, \dots, \mathbf{v}_n + \mathbf{w}_n$ は V の基底である.
6. 必要性は系 4.3.23 より成り立つので, 十分性を示す. 定理 4.3.22 を繰り返し用いると, $\dim(W_1) + \dots + \dim(W_r) - \dim(W_1 + \dots + W_r) = \dim(W_1 \cap (W_2 + \dots + W_r)) + \dots + \dim(W_{r-1} \cap W_r)$ が成り立つ. 与式を仮定するとこれは 0 であるので, 特に $\dim(W_1 \cap (W_2 + \dots + W_r)) = 0$ となり, $W_1 \cap (W_2 + \dots + W_r) = \{\mathbf{0}\}$. 同様にして, $W_i \cap (W_1 + \dots + W_{i-1} + W_{i+1} + \dots + W_r) = \{\mathbf{0}\}$ が得られる.

問題 5.1

1. (1) 線形写像でない (2) 線形写像 (3) 線形写像 (4) 線形写像でない
2. (1) 線形写像 (2) 線形写像 (3) 線形写像 (4) 線形写像でない
3. (1) $K = \mathbb{C}$ とし, 写像 $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ を $f(z) = \bar{z}$ (複素共役) とすれば,
 $f(z_1 + z_2) = \bar{z}_1 + \bar{z}_2 = f(z_1) + f(z_2)$ となって (1) を満たすが,
 $f(az) = \overline{a\bar{z}} \neq a\bar{z}$ となって (2) を満たさない.
- (2) $K = \mathbb{R}$ とし, $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ を

$$f(x_1, x_2) = \begin{cases} x_1 & |x_1| \geq |x_2| \\ x_2 & |x_1| < |x_2| \end{cases}$$

とおく. このとき, f は (1) を満たさない. 例えば $f(1, 0) = 1$, $f(0, -1) = -1$ だが $f(1, -1) = 1$ なので, $f(1, 0) + f(0, -1) \neq f(1, -1)$ である. 一方, $a \neq 0$ について

$$f(ax_1, ax_2) = \begin{cases} ax_1 & |x_1| \geq |x_2| \\ ax_2 & |x_1| < |x_2| \end{cases} = af(x_1, x_2)$$

であり, また $f(0, 0) = 0$ ゆえ, これは $a = 0$ のときも成り立つ. よって f は (2) を満たす.

4. いずれも線形写像の条件 **(L1)**, **(L2)** を満たすことを示すだけである. 以下略.
5. $\mathbf{0} \in W$ でなくてはならないので, $\mathbf{v} = f(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$ である. 逆に $\mathbf{v} = \mathbf{0}$ であれば, 部分空間の条件 (定義 4.1.4) を満たす. よって, $\mathbf{v} = \mathbf{0}$ が条件である.

問題 5.2

1. (1) 核の基底 $\begin{bmatrix} -7 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, 像の基底 $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

(2) 核の基底 $\begin{bmatrix} -3 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$, 像の基底 $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ -4 \\ -3 \end{bmatrix}$

(3) 核の基底 $\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 4 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, 像の基底 $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$

2. (1) 線形写像の条件 **(L1)**, **(L2)** を満たすことを示せばよい. 以下略.
 - (2) 核の定義より $T(g(x)) = (0, \dots, 0)$ ならば $g(x) = 0$ を示せばよい. 因数定理より, $g(a_i) = 0$ ならば $g(x)$ は $(x - a_i)$ で割り切れる. 仮定より, a_1, \dots, a_n は相異なるので, $g(x)$ は $(x - a_1) \cdots (x - a_n)$ で割り切れる. ところが, $g(x)$ の次数は $n - 1$ 以下だから, $g(x) = 0$ となるしかない. よって示された.
 - (3) $K[x]_{n-1}$ と K^n はともに n 次元なので, 定理 5.2.5 を適用できて, T が単射であることから全射が従う
3. $f \circ f = 0$ なので, $\text{Ker}(f) \supset \text{Im}(f)$ が成り立つ. よって, $\dim \text{Ker}(f) \geq \dim \text{Im}(f)$ である. 一方, f について次元公式より, $\dim \text{Ker}(f) + \dim \text{Im}(f) = n$ なので, $n - \dim \text{Im}(f) \geq \dim \text{Im}(f) \iff \dim \text{Im}(f) \leq n/2$ である.
 4. 次元公式より, $\dim V = \text{rank}(g) + \dim \text{Ker}(g)$. $\text{Ker}(g) = \text{Im}(f)$ なので, $\dim \text{Ker}(g) = \text{rank}(f)$. よって $\dim V = \text{rank}(f) + \text{rank}(g)$.
 5. (1) 余因子行列の各成分は $n - 1$ 次小行列式からなるから, 定理 5.2.8 よりすべて 0 である.

る. 定数項は $\Phi_A(0) = \det(-A) = (-1)^n \det(A)$ である.

3. (1) 行列式の定義により $\det(A(t))$ は $a_{ij}(t)$ たちの多項式であるから t の多項式でもある. (2) 一般に, 二つの多項式 $g(t), h(t)$ と $t_0 \in K$ に対し, $s(t) = g(t) + h(t)$, $p(t) = g(t)h(t)$ とするとき, $s(t_0) = g(t_0) + h(t_0)$, $p(t_0) = g(t_0)h(t_0)$ が成り立つことより従う.
4. (1) $f^i(\mathbf{v}) = (f(\cdots(f(\mathbf{v})))) = \lambda^i \mathbf{v}$ に注意して,

$$\phi(f)(\mathbf{v}) = \left(\sum_{i=0}^m a_i f^i \right) (\mathbf{v}) = \sum_{i=0}^m a_i (f^i(\mathbf{v})) = \sum_{i=0}^m a_i \lambda^i \mathbf{v} = \phi(\lambda) \mathbf{v}.$$

(2) $V(f, \lambda)$ は V の部分空間であり, (1) より $V(\phi(f), \phi(\lambda))$ に含まれるから, $V(f, \lambda)$ は $V(\phi(f), \phi(\lambda))$ の部分空間である.

問題 6.2

1. どちらも $\sum_i \dim(V(A, \lambda_i)) < n$ だから対角化不可能である.

2. V の基底 $1, x, \dots, x^n$ に関する f の表現行列は $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & & \\ 0 & 0 & 2 & & \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \\ 0 & & & \ddots & n \\ 0 & \dots & & & 0 \end{bmatrix}$

であるから, $\Phi_A(t) = t^{n+1}$, ゆえに固有値は 0 のみ. 固有空間は $V(A, 0) = K$ (定数多項式全体) で, 固有空間の次元の和が $n+1$ 未満だから, 対角化不可能である.

3. $\Phi_{J_n(\lambda)}(t) = (t - \lambda)^n$ だから固有値は λ のみ. 固有空間は ${}^t \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}$ で生成される 1 次元部分空間だから, $n \geq 2$ のとき $J_n(\lambda)$ は対角化不可能である.

4. $P^{-1}A^kP = (P^{-1}AP) \cdots (P^{-1}AP) = \begin{bmatrix} \lambda_1^k & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n^k \end{bmatrix}$.

5. A の特性多項式は $\Phi_A(t) = (t-1)(t-2)(t-3)$, 固有値は 1, 2, 3 で, 対

応する固有ベクトルを並べた正則行列は $P = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 9 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$, その逆行列は

$$P^{-1} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & -5 & 6 \\ -2 & 8 & -6 \\ 1 & -3 & 2 \end{bmatrix}. \text{ よって}$$

$$\begin{aligned} A^n &= P \begin{bmatrix} 1^n & & \\ & 2^n & \\ & & 3^n \end{bmatrix} P^{-1} \\ &= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 - 2^{n+3} + 3^{n+2} & -5 + 2^{n+5} - 3^{n+3} & 6 - 3 \cdot 2^{n+3} + 2 \cdot 3^{n+2} \\ 1 - 2^{n+2} + 3^{n+1} & -5 + 2^{n+4} - 3^{n+2} & 6 - 3 \cdot 2^{n+2} + 2 \cdot 3^{n+1} \\ 1 - 2^{n+1} + 3^n & -5 + 2^{n+3} - 3^{n+1} & 6 - 3 \cdot 2^{n+1} + 2 \cdot 3^n \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

数列 (a_n) は

$$\begin{bmatrix} a_{n+2} \\ a_{n+1} \\ a_n \end{bmatrix} = A^n \begin{bmatrix} a_2 \\ a_1 \\ a_0 \end{bmatrix}$$

により決まるから, $a_0 = 0, a_1 = 2, a_2 = 4$ に注意して,

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{2} \left((1 - 2^{n+1} + 3^n) a_2 + (-5 + 2^{n+3} - 3^{n+1}) a_1 + (6 - 3 \cdot 2^{n+1} + 2 \cdot 3^n) a_0 \right) \\ &= -3 + 2^{n+2} - 3^n. \end{aligned}$$

問題 6.3

1. (1) 例えば $P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ により $P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

(2) 例えば $P = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ により $P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$.

2. まず $\phi(t) = t^k$ のとき, $P^{-1}\phi(A)P = P^{-1}A^kP$ は (問題 6.2.4 と同様にして) 対角成分が $\lambda_1^k, \dots, \lambda_n^k$ の上三角行列であることがわかる. 一般に $\phi(t) = \sum_{k=0}^m a_k t^k$ のとき,

$$P^{-1}\phi(A)P = P^{-1} \left(\sum_{k=0}^m a_k A^k \right) P = \sum_{k=0}^m a_k (P^{-1}A^kP).$$

この右辺は上三角行列で、その (i, i) 成分は $\sum_{k=0}^m a_i \lambda_i^k = \phi(\lambda_i)$ である.

3. A の固有値は $\Phi_A(t)$ の根であるから、(2) と (3) の同値性が従う. (2) とケイリー・ハミルトンの定理より $A^n = O$ であるから、(2) \Rightarrow (1) である. A の固有値を (重複も込めて) $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ とすると A^k の固有値は $\lambda_1^k, \dots, \lambda_n^k$ であるから、もしある λ_i が 0 でなければ λ_i^k も 0 でなく、従って $A^k \neq O$ である. よって (1) \Rightarrow (3) である.
4. (1) ケイリー・ハミルトンの定理により $\Phi_A(A) = O$ だから、 $\Phi_A(t) = t^n + a_1 t^{n-1} + \dots + a_n$ とすると、 $A^n = -a_1 A^{n-1} - \dots - a_n E$. この関係式を繰り返し用いることにより、 A^m ($m \geq n$) は E, A, \dots, A^{n-1} の線形結合で書ける. よって $\dim(V_A) \leq n$.

$$(2) \text{ 各 } k \text{ に対し } A = \begin{bmatrix} J_k(0) & {}^t\mathbf{0} \\ \mathbf{0} & O \end{bmatrix} \text{ とおくと, } A^k = O \text{ であり, } E, A, \dots, A^{k-1}$$

は線形独立である. よって $\dim(V_A) = k$.

5. A の特性多項式は $\Phi_A(t) = (t-1)(t-2)(t-3)$ であった. t^n を $\Phi_A(t)$ で割った商を $q(t)$, 余りを $at^2 + bt + c$ とおくと

$$t^n = q(t)\Phi_A(t) + at^2 + bt + c. \quad (*)$$

これに $t = 1, 2, 3$ を代入すると a, b, c に関する連立 1 次方程式

$${}^tP \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2^n \\ 3^n \end{bmatrix}$$

(この P は問題 6.2.5 の略解中の P) が得られ、これを解いて a, b, c が n を含む式として) 求まる. (*) で t に A を代入するとケイリー・ハミルトンの定理より

$$A^n = aA^2 + bA + cE$$

となり、問題 6.2.5 と同じ式が得られる.

6. N の特性多項式を $\Phi_N(t) = \prod_{i=1}^n (t - \lambda_i)$ とすると、 $\Phi_{P^{-1}NP}(t) = \Phi_N(t)$. 一方、 $\Phi_{qN}(t) = \prod_{i=1}^n (t - q\lambda_i)$. これらが等しいと仮定すると、「 q 倍」は集合 $\{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$ の置換を引き起こす. $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ の中に 0 でないものがあるとき、これが可能であるためには q がある $1 \leq m \leq n$ に対し $q^m = 1$ を満たさねばならず、仮定に矛盾する. $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ がすべて 0 ならば N はべき零である (問題 6.3.3).

1. (1) A の特性多項式は $\Phi_A(t) = (t-1)(t-2)^2$, 固有値は $\lambda = 1, 2$ で, $V = \tilde{V}(1) \oplus \tilde{V}(2)$ と分解する. ここに一般固有空間 $\tilde{V}(1) = \text{Ker}(E - A)$ の基底として ${}^t \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ が取れ, $\tilde{V}(2) = \text{Ker}(2E - A)$ の基底として ${}^t \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}, {}^t \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ が取れる.
- (2) A の特性多項式は $\Phi_A(t) = (t-1)^2(t-2)^2$, 固有値は $\lambda = 1, 2$ で, $V = \tilde{V}(1) \oplus \tilde{V}(2)$ と分解する. ここに一般固有空間 $\tilde{V}(1) = \text{Ker}(E - A)$ の基底として ${}^t \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ が取れ, $\tilde{V}(2) = \text{Ker}(E - A)$ の基底として ${}^t \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, {}^t \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ が取れる.
2. (1) A の特性多項式は $\Phi_A(t) = (t-2)^3$. $N = A - 2E$ とおくと $N^2 = O$. $e_1 = {}^t \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, v = {}^t \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ とおくと, $Nv = \mathbf{0}$ であり, v, Ne_1, e_1 は K^3 の基底である. $P = \begin{bmatrix} v & Ne_1 & e_1 \end{bmatrix}$ とおくと $P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$.
- (2) A の特性多項式は $\Phi_A(t) = (t-1)^4$. $N = A - E$ とおくと $N^3 = O$. $e_4 = {}^t \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, v = {}^t \begin{bmatrix} -1 & -1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$ とおくと, $Nv = \mathbf{0}$ であり, v, N^2e_4, Ne_4, e_4 は K^4 の基底である. $P = \begin{bmatrix} v & N^2e_4 & Ne_4 & e_4 \end{bmatrix}$ とおくと $P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.
3. (1) $x \in V_j$ のとき, $x = \mathcal{E}_j v$ ($v \in V$) とすると, $T_{\mathcal{E}_i}(v) = \mathcal{E}_i \mathcal{E}_j v = \delta_{ij} x$.
- (2) 任意の $x \in V$ に対し, $x_i = \mathcal{E}_i x$ とおくと $x = x_1 + \cdots + x_r$ ($x_i \in V_i$) と書ける. この書き方は一意的であることが (1) よりわかる. よって $V = V_1 \oplus \cdots \oplus V_r$ である.
4. $\text{rank}(N) = 3, \text{rank}(N^2) = 1, \text{rank}(N^3) = 0$ だから, $d_h = \dim \text{Ker}(N^h)$ とおくと, $d_1 = 2, d_2 = 4, d_3 = d_4 = \cdots = 0$. よって $\nu_1 = -d_2 + 2d_1 = 0, \nu_2 = -d_3 + 2d_2 - d_1 = 1, \nu_3 = -d_4 + 2d_3 - d_2 = 1$.

1. $\|\mathbf{a}\| = \sqrt{14}$, $\|\mathbf{b}\| = \sqrt{7}$, $(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = 7$. \mathbf{a} と \mathbf{b} のなす角を θ とすると, $\cos \theta = \frac{(\mathbf{a}, \mathbf{b})}{\|\mathbf{a}\|\|\mathbf{b}\|} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ となるので, $\theta = \frac{\pi}{4}$.
2. (1) $\int_{-1}^1 (2x^2 + 1)(x - 1)dx = -\frac{8}{3}$
 (2) $f(x) = x^2 + ax + b$ (a, b は実数とする) とおくと, $\|f\|^2 = \frac{2}{3}a^2 + 2b^2 + \frac{4}{3}b + \frac{2}{5} = \frac{2}{3}a^2 + 2\left(b + \frac{1}{3}\right)^2 + \frac{8}{45}$. よって, $a = 0$, $b = -\frac{1}{3}$ のとき, $\|f\|$ は最小値 $\frac{2\sqrt{10}}{15}$ となる. 以上より, 求める多項式は $x^2 - \frac{1}{3}$.
3. (1) 内積の条件 (1), (2), (3) (定義 7.1.1) については, $\text{tr}(A+B) = \text{tr}(A) + \text{tr}(B)$, $\text{tr}(kA) = k\text{tr}(A)$ (k は実数とする), $\text{tr}({}^tA) = \text{tr}(A)$ を用いられよう. 条件 (4) は次のように確かめられる. $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ に対して,
 $(A, A) = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 \geq 0$ であり, 等号成立は $a = b = c = d = 0$ のとき, すなわち, $A = O$ のときに限る.
 (2) 与えられた行列をそれぞれ A, B とすると, $\|A\| = \|B\| = \sqrt{2}$, $(A, B) = 2\cos(\alpha - \beta)$. A と B のなす角を θ とすると, $\cos \theta = \frac{(A, B)}{\|A\|\|B\|} = \cos(\alpha - \beta)$ となるので, $0 \leq \alpha - \beta \leq \pi$ に注意すると, $\theta = \alpha - \beta$.
4. $A = [a_{ij}]$, $B = [b_{ij}]$ とおくと, 任意の i, j について, $a_{ij} = (\mathbf{e}_i, A\mathbf{e}_j) = (\mathbf{e}_i, B\mathbf{e}_j) = b_{ij}$ となる ($\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$ は \mathbb{R}^n の基本単位ベクトルである).
5. 例題 7.1.7 (1) より, 与式と $(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = 0$ は同値である.
6. (1) $W \cap W^\perp$ の任意のベクトル \mathbf{a} に対して, $(\mathbf{a}, \mathbf{a}) = 0$ となるので $\mathbf{a} = \mathbf{0}$.
 (2) $W_1 \subset W_2$ のとき, W_2^\perp の任意のベクトル \mathbf{a} は W_1 の任意のベクトル \mathbf{b} に対して $(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = 0$ となるので, \mathbf{a} は W_1^\perp のベクトルでもある.
7. $A = [\mathbf{a}_1 \ \dots \ \mathbf{a}_n]$ とおくと, $G = {}^tAA$ と表せる. これより, G が正則であることは A が正則であること, さらに, 組 $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n$ が \mathbb{R}^n の基底であることと同値である.

問題 7.2

1. (1) $\frac{1}{5} \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}, \frac{1}{5} \begin{bmatrix} -4 \\ 3 \end{bmatrix}$ (2) $\frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \frac{1}{3\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -4 \end{bmatrix}$
2. $\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{6}}{2}x, \frac{3\sqrt{10}}{4}x^2 - \frac{\sqrt{10}}{4}$

3. 与えられた部分空間 W の正規直交基底として, 組 $\mathbf{w}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\mathbf{w}_2 =$

$$\frac{1}{\sqrt{6}} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} \text{ が選べる. よって, } \mathbf{x} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix} \text{ の } W \text{ への正射影は, } p_W(\mathbf{x}) =$$

$$(\mathbf{x}, \mathbf{w}_1)\mathbf{w}_1 + (\mathbf{x}, \mathbf{w}_2)\mathbf{w}_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

4. 実 2 次正方行列 $P = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ が ${}^t P P = E$ を満たすための条件は $a^2 + c^2 =$

$b^2 + d^2 = 1$ かつ $ab + cd = 0$ であり, これはある実数 θ を用いて $a = \cos \theta$, $b = \mp \sin \theta$, $c = \sin \theta$, $d = \pm \cos \theta$ と表されることと同値である.

5. (1) $g \circ f$ は線形変換であり, V の任意のベクトル \mathbf{a} に対して, $\|g \circ f(\mathbf{a})\| = \|f(\mathbf{a})\| = \|\mathbf{a}\|$ となり, $g \circ f$ はノルムを保つので命題 7.2.13 より直交変換である.
 (2) f^{-1} は線形変換であり, V の任意のベクトル \mathbf{a} に対して, $\|f^{-1}(\mathbf{a})\| = \|f \circ f^{-1}(\mathbf{a})\| = \|\mathbf{a}\|$ となり, f^{-1} はノルムを保つので命題 7.2.13 より直交変換である.
6. \mathbb{R}^3 の正規直交基底 $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ であって, $\mathbf{v}_1 = \frac{\mathbf{u}}{\|\mathbf{u}\|}$ となるものに関して, f の

表現行列は直交行列 $\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ である. 定理 7.2.19 より, f は直交変換で

あり, 表現行列の行列式は基底の取り方に依らないので, 求める行列式は -1 .

7. (1) 方程式 $\Phi_P(t) = 0$ は必ず実数解 α を持ち, 残る解は実数 β, γ であるか, または複素共役な複素数 $\beta, \bar{\beta}$ である. α に属する P の固有ベクトル $\mathbf{x} (\neq \mathbf{0})$ をとると, $\|\mathbf{x}\| = \|A\mathbf{x}\| = \|\alpha\mathbf{x}\| = |\alpha|\|\mathbf{x}\|$ となるので, $|\alpha| = 1$ である. 前者のとき, 同様に $|\beta| = |\gamma| = 1$ であり, $\det(P) = 1$ より $\alpha\beta\gamma = 1$ となるので, α, β, γ の少なくとも一つは 1 である. 後者のとき, $\det(P) = 1$ より $\alpha|\beta|^2 = 1$ となるので, $\alpha = 1$ である.
- (2) $Q = [\mathbf{v}_1 \ \mathbf{v}_2 \ \mathbf{v}_3]$ とおくとこれは直交行列であり, $A = {}^t Q P Q$ も $\det(A) = 1$ である直交行列である. $A\mathbf{e}_1 = {}^t Q P Q\mathbf{e}_1 = {}^t Q P\mathbf{v}_1 =$

${}^tQv_1 = e_1$ となり, また ${}^tPv_1 = v_1$ に注意すると, ${}^tAe_1 = {}^tQ{}^tPQe_1 = {}^tQ{}^tPv_1 = {}^tQv_1 = e_1$ となる. 以上より, A は求める形に表される.

(3) 問題 7.2.4 より, ある実数 θ を用いて, $R = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$ と表され

る. (2) より, \mathbb{R}^3 の任意のベクトル $xv_1 + yv_2 + zv_3$ について, $P(xv_1 +$

$$yv_2 + zv_3) = PQ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = QA \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = Q \begin{bmatrix} x \\ y \cos \theta - z \sin \theta \\ y \sin \theta + z \cos \theta \end{bmatrix} = xv_1 +$$

$(y \cos \theta - z \sin \theta)v_2 + (y \sin \theta + z \cos \theta)v_3$ となる. よって, T_P は \mathbb{R}^3 の原点を通る v_1 の方向の直線を回転軸とする角度 θ の回転変換である.

問題 8.1

- 複素数 λ を A の任意の固有値とし, \mathbb{C}^n のベクトル $x (\neq \mathbf{0})$ を λ に属する A の固有ベクトルとする. このとき, $\bar{\lambda}$ は A の固有値であり, \bar{x} は $\bar{\lambda}$ に属する A の固有ベクトルである. $\lambda {}^t x \bar{x} = {}^t (\lambda x) \bar{x} = {}^t (Ax) \bar{x} = {}^t x {}^t A \bar{x} = -{}^t x A \bar{x} = -{}^t x (\bar{\lambda} \bar{x}) = -\bar{\lambda} {}^t x \bar{x}$ となり, ${}^t x \bar{x} \neq 0$ より, $\lambda = -\bar{\lambda}$ が成り立つ.
- 与えられた行列を A とする.

(1) A の固有値は -1 のみ. -1 に属する A の固有ベクトル $\frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ にベ

クトルを追加して, \mathbb{R}^2 の正規直交基底 $\frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$ を得る. 例

えば直交行列 $\frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$ によって ${}^t P A P = \begin{bmatrix} -1 & 10 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$.

(2) A の固有値は 2 のみ. 2 に属する A の固有ベクトル $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{bmatrix}$ にベ

クトルを追加して, \mathbb{R}^3 の正規直交基底 $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{bmatrix}$ を得る. 例

えば直交行列 $P = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ によって ${}^t P A P = \begin{bmatrix} 2 & 0 & \sqrt{2} \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$.

3. 与えられた行列を A とする.

$$(1) \text{ 例えば } P = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \text{ によって } {}^tPAP = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

$$(2) \text{ 例えば } P = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{2}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{bmatrix} \text{ によって } {}^tPAP = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

$$(3) \text{ 例えば } P = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{2}{\sqrt{6}} \end{bmatrix} \text{ によって } {}^tPAP = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{bmatrix}.$$

4. (1) \mathbf{a}, \mathbf{b} を V の任意のベクトルとする. $g \circ f$ が対称変換であるならば, $(g \circ f(\mathbf{a}), \mathbf{b}) = (\mathbf{a}, g \circ f(\mathbf{b})) = (g(\mathbf{a}), f(\mathbf{b})) = (f \circ g(\mathbf{a}), \mathbf{b})$ となるので, $g \circ f = f \circ g$ が成り立つ (問題 7.1.4 参照). 逆に, $g \circ f = f \circ g$ が成り立つならば, $(g \circ f(\mathbf{a}), \mathbf{b}) = (f(\mathbf{a}), g(\mathbf{b})) = (\mathbf{a}, f \circ g(\mathbf{b})) = (\mathbf{a}, g \circ f(\mathbf{b}))$ となるので, $g \circ f$ は対称変換である.
- (2) V の任意のベクトル \mathbf{a}, \mathbf{b} に対して, $(f^{-1}(\mathbf{a}), \mathbf{b}) = (f^{-1}(\mathbf{a}), f \circ f^{-1}(\mathbf{b})) = (f \circ f^{-1}(\mathbf{a}), f^{-1}(\mathbf{b})) = (\mathbf{a}, f^{-1}(\mathbf{b}))$ となるので, f^{-1} は対称変換である.

5. 角度 θ ($0 \leq \theta < 2\pi$) の回転変換の標準基底に関する表現行列 $\begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$

が対称行列であるためには, $\sin \theta = 0$, すなわち, $\theta = 0, \pi$ であることが必要十分である. よって, 求める変換は恒等変換 ($\theta = 0$) と -1 倍写像 ($\theta = \pi$) に限る.

$$6. (1) AB = BA = \begin{bmatrix} 2 & -4 \\ -4 & 8 \end{bmatrix}$$

- (2) A の固有値は $5, 0$, B の固有値は $2, 7$ である. 5 に属する A の固有空間と 2 に属する B の固有空間はともに $\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$ で生成される部分空間であり, 0 に属する A の固有空間と 7 に属する B の固有空間はともに $\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ で生成される部分空間である.

$$(3) P = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \text{とおくと, } {}^tPAP = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, {}^tPBP = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 7 \end{bmatrix}.$$

問題 8.2

$$1. (1) \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \quad (2) \begin{bmatrix} 4 & 3 & 1 \\ 3 & 3 & -4 \\ 1 & -4 & -1 \end{bmatrix} \quad (3) \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}$$

$$2. (1) q(x_1, x_2) \text{ の係数行列 } \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \text{ の固有値は } 3, -2 \text{ であるので, } q(x_1, x_2) \text{ の標準形は } 3x_1^2 - 2x_2^2, \text{ 符号は } (1, 1).$$

$$(2) q(x_1, x_2, x_3) \text{ の係数行列 } \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} \text{ の固有値は } 2, 5, -1 \text{ であるので, } q(x_1, x_2, x_3) \text{ の標準形は } 2x_1^2 + 5x_2^2 - x_3^2, \text{ 符号は } (2, 1).$$

$$(3) q(x_1, x_2, x_3) \text{ の係数行列 } \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix} \text{ の固有値は } 1, -\frac{1}{2} \text{ (重複度 2) であるので, } q(x_1, x_2, x_3) \text{ の標準形は } x_1^2 - \frac{1}{2}x_2^2 - \frac{1}{2}x_3^2, \text{ 符号は } (1, 2).$$

$$3. (1) q(x_1, x_2, x_3) \text{ の係数行列 } \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \text{ に定理 8.2.7 (1) を適用すればよい.}$$

$$(2) q(x_1, x_2, x_3) \text{ の係数行列 } \begin{bmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & -3 \\ 2 & -3 & 0 \end{bmatrix} \text{ が定理 8.2.7 (1) 及び (2) の条件をどちらも満たさないことを確認すればよい. (例えば, } q(1, 0, 1) = 3 > 0, q(1, 0, 0) = -1 < 0 \text{ である. このように, より直接的に示すこともできる.)}$$

$$4. q(x_1, x_2) \text{ の係数行列 } \begin{bmatrix} a & \frac{b}{2} \\ \frac{b}{2} & c \end{bmatrix} \text{ に対して定理 8.2.7 (1) を適用すると, 求める必要十分条件が得られる.}$$

5. $q(x_1, x_2, x_3)$ の係数行列 $\begin{bmatrix} 1 & a & a \\ a & 1 & a \\ a & a & 1 \end{bmatrix}$ の固有値は $2a + 1, -a + 1$ (重複度 2)

であるので, $q(x_1, x_2, x_3)$ の符号は, $-\frac{1}{2} < a < 1$ のとき $(3, 0)$, $a < -\frac{1}{2}$ のとき $(2, 1)$, $a > 1$ のとき $(1, 2)$, $a = -\frac{1}{2}$ のとき $(2, 0)$, $a = 1$ のとき $(1, 0)$.

6. ある直交行列 P による変数変換 $\mathbf{x} = P\mathbf{y}$ $\left(\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}, \mathbf{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} \right)$ によつ

て, $q(x_1, x_2, x_3) = \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \lambda_3 y_3^2$ ($\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \lambda_3$) と表される. ここで, $y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 = \|\mathbf{y}\|^2 = \|^t P \mathbf{x}\|^2 = \|\mathbf{x}\|^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1$ であるので, $q(x_1, x_2, x_3) \leq \lambda_1(y_1^2 + y_2^2 + y_3^2) = \lambda_1$ かつ $q(x_1, x_2, x_3) \geq$

$\lambda_3(y_1^2 + y_2^2 + y_3^2) = \lambda_3$ となる. よつて, $q(x_1, x_2, x_3)$ は $\mathbf{y} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ のとき最

大値 λ_1 をとり, $\mathbf{y} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ のとき最小値 λ_3 をとる.

7. $x' = x - 1$, $\begin{bmatrix} y \\ z \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y' \\ z' \end{bmatrix}$ と変数変換すると, $F(x, y, z) =$

$8(x')^2 + 2(y')^2 - 8(z')^2 - 8$ となる. これより, $F(x, y, z) = 8, -8, -24$ が表す 2 次曲面は, それぞれ一葉双曲面, 楕円錐面, 二葉双曲面である.

8. $a_{11}, a_{12}, a_{22}, b_1, b_2, c$ を実数とする. a_{11}, a_{12}, a_{22} の少なくとも一つは 0 でないとき, 次の方程式を満たす点 (x, y) からなる座標平面上の図形を 2 次曲線という.

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + 2a_{12}xy + 2b_1x + 2b_2y + c = 0 \quad (1)$$

(1) が定める 2 次曲線を C とする.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{bmatrix}, \mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}, \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

とおくと, (1) は次のように表される.

$${}^t \mathbf{x} A \mathbf{x} + 2(\mathbf{b}, \mathbf{x}) + c = 0 \quad (2)$$

ここで、対称行列 A はある 2 次直交行列 P によって次のように対角化される。

$${}^tPAP = \begin{bmatrix} a'_{11} & 0 \\ 0 & a'_{22} \end{bmatrix}, \quad a'_{11} \neq 0$$

直交変換 $\mathbf{x} = P\mathbf{x}'$ によって、新しい座標 $\mathbf{x}' = \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$ を定めると、ある実数 b'_1, b'_2, c' について、(2) は次のように表される。

$$a'_{11}(x')^2 + a'_{22}(y')^2 + 2b'_1x' + 2b'_2y' + c' = 0 \quad (3)$$

(実際は $c = c'$ である)

以下、2 次形式 ${}^t\mathbf{x}A\mathbf{x}$ の符号 (p, q) に応じて場合分けを行う。必要であれば (2) の両辺を (-1) 倍することで、 $p \geq q$ と仮定してよい。

[C1] $(p, q) = (2, 0)$ のとき、 $a'_{11} > 0, a'_{22} > 0$ である。このとき、平行移動

$$x'' = x' - b'_1, \quad y'' = y' - b'_2 \quad \text{によって、新しい座標 } \mathbf{x}'' = \begin{bmatrix} x'' \\ y'' \end{bmatrix} \text{ を定める}$$

と、ある実数 c'' について、(3) は次のように表される。

$$a'_{11}(x'')^2 + a'_{22}(y'')^2 + c'' = 0 \quad (4)$$

[C1a] $c'' > 0$ のとき、 C は空集合である。

[C1b] $c'' < 0$ のとき、 C は楕円である。

[C1c] $c'' = 0$ のとき、 C は一点 $(x'' = y'' = 0)$ である。

[C2] $(p, q) = (1, 1)$ のとき、 $a'_{11} > 0, a'_{22} < 0$ としてよい。このとき、[C1] と同じ座標変換によって、(4) を得る。

[C2a] $c'' \neq 0$ のとき、 C は双曲線である。

[C2b] $c'' = 0$ のとき、 C は交わる二直線 $(\sqrt{a'_{11}}x'' = \pm\sqrt{-a'_{22}}y'')$ である。

[C3] $(p, q) = (1, 0)$ のとき、 $a'_{11} > 0, a'_{22} = 0$ としてよい。このとき、平行移

$$\text{動 } x'' = x' - b'_1, \quad y'' = y' \quad \text{によって、新しい座標 } \mathbf{x}'' = \begin{bmatrix} x'' \\ y'' \end{bmatrix} \text{ を定めると、}$$

ある実数 b''_2, c'' について、(3) は次のように表される。

$$a'_{11}(x'')^2 + 2b''_2y'' + c'' = 0 \quad (5)$$

[C3a] $b''_2 \neq 0$ のとき、 C は放物線である。

[C3b] $b''_2 = 0$ かつ $c'' > 0$ のとき、 C は空集合である。

[C3c] $b_2'' = 0$ かつ $c'' < 0$ のとき, C は平行な二直線 ($\sqrt{a_{11}'}x'' = \pm\sqrt{-c''}$) である.

[C3d] $b_2'' = 0$ かつ $c'' = 0$ のとき, C は直線 ($x'' = 0$) である.

問題 8.3

1. $\|\mathbf{a}\| = \sqrt{3}$, $\|\mathbf{b}\| = \sqrt{15}$, $(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = 6$

2. (1) $\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ -i \end{bmatrix}$, $\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} i \\ -1 \end{bmatrix}$ (2) $\frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} i \\ 1 \\ i \end{bmatrix}$, $\frac{1}{\sqrt{6}} \begin{bmatrix} 1 \\ 2i \\ 1 \end{bmatrix}$, $\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} i \\ 0 \\ -i \end{bmatrix}$

3. (1) \mathbf{b} と \mathbf{c} をそれぞれ W_1 と W_2 の任意のベクトルとする. $(W_1 + W_2)^\perp$ の任意のベクトル \mathbf{a} は $(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = (\mathbf{a}, \mathbf{c}) = 0$ となるので, $W_1^\perp \cap W_2^\perp$ のベクトルでもある. 逆に, $W_1^\perp \cap W_2^\perp$ の任意のベクトル \mathbf{a} は $(\mathbf{a}, \mathbf{b} + \mathbf{c}) = 0$ となるので, $(W_1 + W_2)^\perp$ のベクトルでもある.

(2) (1) と定理 8.3.10 (2) より, $(W_1^\perp + W_2^\perp)^\perp = (W_1^\perp)^\perp \cap (W_2^\perp)^\perp = W_1 \cap W_2$. ここで, 両辺の直交補空間をとると求める式が得られる.

4. 複素 2 次正方行列 $U = \begin{bmatrix} \alpha & \gamma \\ \beta & \delta \end{bmatrix}$ が $U^*U = E$ を満たすための条件は $|\alpha|^2 +$

$|\beta|^2 = |\gamma|^2 + |\delta|^2 = 1$ かつ $\alpha\bar{\gamma} + \beta\bar{\delta} = 0$ であり, これはある複素数 z について, $|z| = |\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$ かつ $\gamma = -z\bar{\beta}$, $\delta = z\bar{\alpha}$ となることと同値である.

5. (1) $g \circ f$ は線形変換であり, V の任意のベクトル \mathbf{a} について, $\|g \circ f(\mathbf{a})\| = \|f(\mathbf{a})\| = \|\mathbf{a}\|$ となり, $g \circ f$ はノルムを保つのでユニタリ変換である.

(2) f^{-1} は線形変換であり, V の任意のベクトル \mathbf{a} について, $\|f^{-1}(\mathbf{a})\| = \|f \circ f^{-1}(\mathbf{a})\| = \|\mathbf{a}\|$ となり, f^{-1} はノルムを保つのでユニタリ変換である.

6. (1) 例えば $U = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -i & i \end{bmatrix}$ によって $U^*AU = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.

(2) 例えば $U = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & -\frac{2i}{\sqrt{6}} & \frac{i}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix}$ によって $U^*AU = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

(3) 例えば $U = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{i}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{i}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{i}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$ によって $U^*AU = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$.

7. A を n 次正規行列とする. このとき, ある n 次ユニタリ行列 U が存在して,

U^*AU は対角行列 D となる.

- (1) A がユニタリ行列であるとする. このとき, ユニタリ行列の積である D もユニタリ行列であるので, A のすべての固有値の絶対値は 1 である. 逆に, A のすべての固有値の絶対値が 1 であるとする. このとき, D はユニタリ行列であるので, ユニタリ行列の積である $A = UDU^*$ もユニタリ行列である.
- (2) 必要性は命題 8.3.20 より成り立つので, 十分性を示す. A のすべての固有値が実数であるとする. このとき, D は実対角行列であるので, $A^* = (UDU^*)^* = UD^*U^* = UDU^* = A$ となり, A はエルミート行列である.