問題の解答

問題 1.1

1. （１） 2

（２） $\dfrac{3}{4}$

（３） $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{n^3+2n}{-2n^3+3}=\lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{2}{n^2}}{-2+\frac{3}{n^3}}=-\frac{1}{2}$

（４） $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{4n^4+3n^3-2n}{2n^4-3n^3+4}=\lim_{n\to\infty}\frac{4+\frac{3}{n}-\frac{2}{n^3}}{2-\frac{3}{n}+\frac{4}{n^4}}=2$

（５） $-\infty$

（６） $\displaystyle\lim_{n\to\infty}(n-n^2)=\lim_{n\to\infty}n(1-n)=-\infty$

（７） $\displaystyle\lim_{n\to\infty}(3+n^2)\left(\frac{2n}{3-n^2}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{2n(\frac{3}{n^2}+1)}{\frac{3}{n^2}-1}=-\infty$

（８） $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(3+n^2+\frac{2n^3}{3-n^2}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{(3+n^2)(3-n^2)+2n^3}{3-n^2}$

$\displaystyle=\lim_{n\to\infty}\frac{9-n^4+2n^3}{3-n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{9}{n^2}-n^2+2n}{\frac{3}{n^2}-1}=\infty$

（９） $\displaystyle-\frac{1}{n^2}\le\frac{(-1)^n}{n^2}\le\frac{1}{n^2}$ に対して定理 1.1.11（はさみうち）を用いると，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(-\frac{1}{n^2}\right)=0$ および $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}=0$ より，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}=0$ が従う．

（10） 前問と同様に定理 1.1.11（はさみうち）を用いると，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n-n^2}=0$ より $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{(-1)^n}{n-n^2}=0$ が従う．

2. （１） 0

（２） ∞

（３） 0

（４） 発散する

（５） 発散する

（６） $-\infty$

（７） $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{3^n}{(-2)^n+3^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\left(\frac{-2}{3}\right)^n+1}=1$

（８） $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{(-1)^n n}{n^2+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{(-1)^n}{n+\frac{1}{n}}=0$

（９） $\displaystyle\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})=\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})\frac{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1-n}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$

$\displaystyle=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}=0$

（10） $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^2+1}}{n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}}{1+\frac{1}{n}}=1$

(11)　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{2^n}{n^2}=\infty$ （定理 1.1.15 とその下のコメントを参照.）

(12)　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{n^5}{2^n}=0$ （同上）

(13)　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{2^n}{n!}=0$ （定理 1.1.17 を参照.）

(14)　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{(n-5)!}{2^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n-5)!}{2^{n-5}}\frac{1}{2^5}=\infty$

(15)　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{n^3+n-n!}{3^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{n^3}{n!}+\frac{1}{(n-1)!}-1}{\frac{3^n}{n!}}=-\infty$

(16)　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{3^n+n!}{(-2)^n+(n+1)!}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{3^n}{n!}+1}{\frac{(-2)^n}{n!}+n}=0$

(17)　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^n=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}}{\left(1+\frac{1}{n+1}\right)}=\frac{e}{1}=e$

(18)　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)^n=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{1+\frac{1}{n}}\right)^n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}=\frac{1}{e}$

3.　$(x+y)^4=x^4+4x^3y+6x^2y^2+4xy^3+y^4$,　$(x+y)^5=x^5+5x^4y+10x^3y^2+10x^2y^3+5xy^4+y^5$

4.　二項定理により

$$2^n=(1+1)^n=1+n+{}_nC_2 1^{n-2}1^2+{}_nC_3 1^{n-3}1^3+{}_nC_4 1^{n-4}1^4$$

$$+\cdots+{}_nC_{n-2}1^2 1^{n-2}+n+1>{}_nC_4$$

が成り立つ．${}_nC_4=\dfrac{n!}{4!\,(n-4)!}=\dfrac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{24}$ より，

$$0\le\lim_{n\to\infty}\frac{n^3}{2^n}\le\lim_{n\to\infty}\frac{n^3}{\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{24}}=\lim_{n\to\infty}\frac{24}{n(1-\frac{1}{n})(1-\frac{2}{n})(1-\frac{3}{n})}=0$$

問題 1.2

1.　(1)　$\displaystyle\lim_{x\to2}\frac{x^2+5}{x^2-3}=\frac{4+5}{4-3}=9$

(2)　$\displaystyle\lim_{x\to1}\frac{x^2-1}{x^3-1}=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)(x^2+x+1)}=\lim_{x\to1}\frac{x+1}{x^2+x+1}=\frac{2}{3}$

(3)　$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-1}{x^3-1}=\lim_{x\to\infty}\frac{1-\frac{1}{x^2}}{x-\frac{1}{x^2}}=0$

(4)　$\displaystyle\lim_{x\to2}\frac{x^2-x-2}{x^2-4}=\lim_{x\to2}\frac{(x-2)(x+1)}{(x-2)(x+2)}=\lim_{x\to2}\frac{x+1}{x+2}=\frac{3}{4}$

(5)　$\displaystyle\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+1}-x)=\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+1}-x)\frac{\sqrt{x^2+1}+x}{\sqrt{x^2+1}+x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+1-x^2}{\sqrt{x^2+1}+x}$

$\displaystyle=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\sqrt{x^2+1}+x}=0$

(6)　$\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{2x+1}-\sqrt{x+1}}{x}=\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{2x+1}-\sqrt{x+1}}{x}\frac{\sqrt{2x+1}+\sqrt{x+1}}{\sqrt{2x+1}+\sqrt{x+1}}$

$\displaystyle=\lim_{x\to0}\frac{(2x+1)-(x+1)}{x(\sqrt{2x+1}+\sqrt{x+1})}=\lim_{x\to0}\frac{1}{\sqrt{2x+1}+\sqrt{x+1}}=\frac{1}{2}$

(7)　∞ （$\displaystyle\lim_{n\to\infty}2^n=\infty$ と同様に理解する．厳密な議論は A.1 節を参照．厳密には A.2 節に書かれているアルキメデスの原理まで遡る必要がある.）

(8)　$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^x=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{2^x}=0$

2.　(1)　∞（$x=0.1,0.01,0.001,\cdots$ という列を考えると，$\frac{1}{x}=10,100,1000,\cdots$ のように限りなく大きくなる.）

（２） $-\infty$（$x = -0.1, -0.01, -0.001, \cdots$ という列を考えると，$\frac{1}{x} = -10, -100, -1000, \cdots$ のように限りなく小さくなる.）

（３） $-\infty$ （$\frac{1}{x} \to \infty$, $\frac{1}{x-1} \to -1$ $(x \to 0+0)$ より従う.）

（４） ∞ （$\frac{1}{x} \to -\infty$, $\frac{1}{x-1} \to -1$ $(x \to 0-0)$ より従う.）

（５） ∞ （$x^3 \to 8$, $\frac{1}{x-2} \to \infty$ $(x \to 2+0)$ より従う.）

（６） $-\infty$ （$x^3 \to 8$, $\frac{1}{x-2} \to -\infty$ $(x \to 2-0)$ より従う.）

（７） $-\infty$ （$x^3 \to -8$, $\frac{1}{x-2} \to \infty$ $(x \to -2+0)$ より従う.）

（８） ∞ （$x^3 \to -8$, $\frac{1}{x-2} \to -\infty$ $(x \to -2-0)$ より従う.）

（９） 1 （$x > 2$ のとき $|x-2| = x-2$ であることから従う.）

（10） -1 （$x < 2$ のとき $|x-2| = -(x-2)$ であることから従う.）

（11） $t = \dfrac{1}{x-1}$ とおくと，$\displaystyle\lim_{x \to 1+0} e^{\frac{1}{x-1}} = \lim_{t \to \infty} e^t = \infty$

（12） $t = \dfrac{1}{x-1}$, $s = -t$ とおくと，$\displaystyle\lim_{x \to 1-0} e^{\frac{1}{x-1}} = \lim_{t \to -\infty} e^t = \lim_{s \to \infty} e^{-s} = \lim_{s \to \infty} \frac{1}{e^s} = 0$ のように計算できる．$e^{-s} = \dfrac{1}{e^s}$ については定理 2.1.2 の指数法則を参照.

3. （１） 最大なし．最小は 0．上限は 1．下限は 0.
   （２） 最大なし．最小なし．上限は $\sqrt{2}$．下限は $-\sqrt{2}$.
   （３） 最大は 2．最小なし．上限は 2．下限は 1.
   （４） 最大なし．最小は 0．上限は 1．下限は 0.
4. 解答例 : あやとりの紐の 2 点 a, b を一番遠くにしたとき，その 2 点 a, b の間の距離は π である．よって，a を中心とする半径 π の円の中にあやとりの紐は必ず収まることになる．半径 π の円の面積は $\pi \times \pi^2 = \pi^3$ であり，あやとりの紐が囲む図形の面積はそれよりも小さいので，π^3 は上界 (upper bound) である．このように，上限を求めることが難しい場合には，上界を一つ見つけることが現象を把握するための大事なステップとなる.
5. 頑張って考えよう！ それが研究というものです．上限を与えるのは半径 1 の円のときであることが知られている．つまり，上限は π である．これは**等周不等式**によって証明される.

問題 1.3

1. （厳密な証明については A.1 節の ε–δ 論法を参照.）
   （１） 連続
   （２） 連続
   （３） 連続ではない
   （４） 連続
   （５） 連続ではない
   （６） 連続ではない
2. （１） 最大値は 1．最小値は 0.
   （２） 最大値はなし．最小値は 0.
   （３） 最大値はなし．最小値は 0.
   （４） 最大値はなし．最小値もなし.
   （５） 最大値は 9．最小値は 4.
   （６） 最大値はなし．最小値は 0.
3. （１） 最大値は 1．最小値は $\dfrac{1}{3}$.
   （２） 最大値はなし．最小値は 1.
   （３） 最大値は $-\dfrac{1}{3}$．最小値はなし.
   （４） 最大値はなし．最小値は -1.
   （５） 最大値はなし．最小値もなし.
   （６） 最大値は 1．最小値は $-\dfrac{1}{5}$.

4. $g(f(x)) = 2f(x) + 3 = 2x^3 + 3$, $f(g(x)) = (g(x))^3 = (2x + 3)^3$
5. $g(f(x))$ について：$f(x)$ の出力の範囲は $f(x) \geq 1$ であり，この値が $g(x)$ の入力となる．$g(x)$ の定義域を $[1, \infty)$ に制限すると，$g(x)$ の最大値は 1，最小値は存在しないことが分かる．よって，$g(f(x))$ の最大値は 1 であり，最小値は存在しない．

   $f(g(x))$ について：$g(x)$ の出力の範囲は $g(x) \leq 2$ であり，この値が $f(x)$ の入力となる．$f(x)$ の定義域を $(-\infty, 2]$ に制限すると，$f(x)$ の最大値は存在せず，最小値は 1 であることが分かる．よって，$f(g(x))$ の最大値は存在せず，最小値は 1 である．
6. $f(x) = x^2$ は有界閉区間 $[0, 1]$ において連続であり，$0^2 = 0$, $2^2 = 4$ より，$f(0) \neq f(2)$ が成り立つ．よって，中間値の定理により $f(c) = c^2 = 2$ を満たす実数 c が 0 と 2 の間に存在する．
7. $f(-2) = -32 + 24 + 1 = -7$, $f(0) = 1$, $f(1) = -1$, $f(2) = 32 - 24 + 1 = 9$ であり，中間値の定理により，$f(x) = 0$ となる点 x が 3 つの開区間 $(-2, 0)$, $(0, 1)$, $(1, 2)$ のそれぞれに存在する．よって，$f(x) = 0$ は少なくとも 3 つの異なる実数解をもつ．
8. $g(x) = f(x) - x$ とおくと，$g(0) \in [0, 1]$, $g(1) \in [-1, 0]$ が成り立つ．$g(0) = 0$ のときは，$f(0) = 0$ より，$c = 0$ とすれば主張が従う．$g(1) = 0$ のときは，$f(1) = 1$ より，$c = 1$ とすれば主張が従う．$g(0) \neq 0$ かつ $g(1) \neq 0$ のとき，$g(1) < 0 < g(0)$ が成り立つことから，中間値の定理により，$g(c) = 0$ となる $c \in (0, 1)$ が存在する．よって，$f(c) = c$ となる $c \in (0, 1)$ が存在する．

問題 2.1

1. （１） $2^3 \times 4^3 = 2^3 \times 2^6 = 2^9$, $2^9 = (2^3)^3 = 8^3$ より，$m = 9, n = 3$

   （２） $3^{\frac{1}{2}} \times 9^{\frac{1}{6}} = 3^{\frac{1}{2}} \times 3^{\frac{1}{3}} = 3^{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}} = 3^{\frac{5}{6}}$ より，$m = 5, n = 6$

   （３） $3^{\frac{1}{3}} \times 6^{-\frac{1}{6}} \times \sqrt{2} = 3^{\frac{1}{3}} \times 3^{-\frac{1}{6}} \times 2^{-\frac{1}{6}} \times 2^{\frac{1}{2}} = 3^{\frac{1}{3}-\frac{1}{6}} \times 2^{-\frac{1}{6}+\frac{1}{2}} = 3^{\frac{1}{6}} \times 2^{\frac{1}{3}}$ より，$m = 3, n = 6$

   （４） $(\sqrt{2} \times 3^{\frac{1}{4}})^6 \times (\sqrt{3})^{-m} = (2^{\frac{1}{2}} \times 3^{\frac{1}{4}})^6 \times 3^{-\frac{m}{2}} = 2^3 \times 3^{\frac{3}{2}} \times 3^{-\frac{m}{2}} = 2^3 \times 3^{\frac{3}{2}-\frac{m}{2}} = 2^n$ より，$m = n = 3$
2. （１） $\log_2 4^{10} = \log_2 2^{20} = 20$ より，$m = 20$

   （２） $\log_3 \dfrac{1}{729} = \log_3 729^{-1} = -\log_3 729 = -\log_3 3^6 = -6$ より，$m = -6$

   （３） $\log_3 216 = \log_3(3^3 \times 2^3) = \log_3 3^3 + \log_3 2^3 = 3 + 3\log_3 2$ より，$m = n = 3$

   （４） $\log \dfrac{125}{81} = \log 125 - \log 81 = \log 5^3 - \log 3^4 = 3\log 5 - 4\log 3$ より，$m = 3, n = -4$
3. （１） $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left(1 + \frac{1}{x}\right)^{2x} = \lim_{x\to\infty}\left(\left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x}\right)^2 = e^2$

   （２） $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left(1 + \frac{1}{2x}\right)^{x} = \lim_{x\to\infty}\left(\left(1 + \frac{1}{2x}\right)^{2x}\right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{e}$

   （３） $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left(2 + \frac{1}{x}\right)^{x} = \lim_{x\to\infty} 2^x\left(1 + \frac{1}{2x}\right)^{x} = \infty$

   （４） $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{x}\right)^{x} = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{x}\left(1 + \frac{2}{x}\right)^{x} = \lim_{x\to\infty}\frac{1}{2^x}\left(\left(1 + \frac{2}{x}\right)^{\frac{x}{2}}\right)^2 = 0$

   （５） $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left(1 + \frac{a}{x}\right)^{x} = \lim_{x\to\infty}\left(\left(1 + \frac{a}{x}\right)^{\frac{x}{a}}\right)^a = e^a$（この等式より，指数関数は $\displaystyle e^x = \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$ と書くことができる．）

   （６） $t = \dfrac{1}{x}$ とおくと，$x \to 0{+}0$ のとき $t \to \infty$ である．よって，$\displaystyle\lim_{x\to 0+0}(1+ax)^{\frac{1}{x}} = \lim_{t\to\infty}\left(1 + \frac{a}{t}\right)^t = e^a$ が得られる．また，$x \to 0 - 0$ のときは $t \to -\infty$ であり，定理 1.2.9 を用いると，

   $$\lim_{x\to 0-0}(1 + ax)^{\frac{1}{x}} = \lim_{t\to-\infty}\left(1 + \frac{a}{t}\right)^t = \lim_{t\to-\infty}\left(\left(1 + \frac{a}{t}\right)^{\frac{t}{a}}\right)^a = e^a$$

   が得られる．右極限と左極限が共に e^a であることから，$\displaystyle\lim_{x\to 0}(1 + ax)^{\frac{1}{x}} = e^a$ が従う．

問題 2.2

1. （１） 定理 2.2.1（１）より，$\sin 2\alpha = \sin(\alpha + \alpha) = \sin\alpha\cos\alpha + \cos\alpha\sin\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$．定理 2.2.1（２）より，$\cos 2\alpha = \cos(\alpha + \alpha) = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$．この式に $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$

を用いることで，$\cos 2\alpha = 1-2\sin^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$ が得られる．定理 2.2.1（3）より，$\tan 2\alpha = \tan(\alpha+\alpha) = \dfrac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}$.

（2） $\cos 2\alpha = 1-2\sin^2\alpha$ の α を $\dfrac{\alpha}{2}$ に置き換えると，$\cos\alpha = 1-2\sin^2\dfrac{\alpha}{2}$．よって，$\sin^2\dfrac{\alpha}{2} = \dfrac{1-\cos\alpha}{2}$ が得られる．同様に，$\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$ の α を $\dfrac{\alpha}{2}$ に置き換えると，$\cos\alpha = 2\cos^2\dfrac{\alpha}{2} - 1$. よって，$\cos^2\dfrac{\alpha}{2} = \dfrac{1+\cos\alpha}{2}$ が得られる．$\tan^2\dfrac{\alpha}{2} = \dfrac{\sin^2\frac{\alpha}{2}}{\cos^2\frac{\alpha}{2}} = \dfrac{\frac{1-\cos\alpha}{2}}{\frac{1+\cos\alpha}{2}} = \dfrac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}$.

2. いずれも，右辺に加法定理を用いることで左辺が得られる．

3. $-1 \le \sin x \le 1$ より $-\dfrac{1}{x} \le \dfrac{\sin x}{x} \le \dfrac{1}{x}$ が成り立つ．よって，定理 1.2.8（はさみうち）を使うと，$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x} = 0$ より $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{\sin x}{x} = 0$ が従う．

4. （1） $\sin\theta = -\dfrac{1}{3}$ のときの $\tan\theta$ を求めればよい．arcsin の値域は $-\dfrac{\pi}{2} \le \theta \le \dfrac{\pi}{2}$ であるから，$\cos\theta \ge 0$ である．よって，$\cos\theta = \sqrt{1-\left(-\dfrac{1}{3}\right)^2} = \dfrac{\sqrt{8}}{3}$ であり，$\tan\theta = \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta} = -\dfrac{1}{3}\times\dfrac{3}{\sqrt{8}} = -\dfrac{1}{\sqrt{8}} = -\dfrac{\sqrt{2}}{4}$ となる．

（2） $\tan y = \dfrac{1}{x^2}$, $\tan z = x^2$ を満たす y, z に対し，$y+z$ を計算すればよい．ここで，$\dfrac{1}{x^2} > 0$ より $0 < y < \dfrac{\pi}{2}$, $x^2 \ge 0$ より $0 \le z < \dfrac{\pi}{2}$ である．$\tan\left(\dfrac{\pi}{2}-\theta\right) = \dfrac{1}{\tan\theta}$ を使うと，$\tan z = x^2 = \dfrac{1}{\tan y} = \tan\left(\dfrac{\pi}{2}-y\right)$ が成り立つことが分かる．ここで，z と $\dfrac{\pi}{2}-y$ の存在範囲は $0 \le z < \dfrac{\pi}{2}$, $0 < \dfrac{\pi}{2}-y < \dfrac{\pi}{2}$ であることと，$\tan\theta$ は $0 \le \theta < \dfrac{\pi}{2}$ において狭義単調増加関数であることから，$z = \dfrac{\pi}{2}-y$ が従う．よって，$y+z = \dfrac{\pi}{2}$ である．

5. （1） $\theta = \arcsin x = \arccos\dfrac{3}{4}$ とおく．θ は arcsin と arccos の両方の値域に含まれるので，$0 \le \theta \le \dfrac{\pi}{2}$ である．したがって，$x = \sin\theta \ge 0$, $\cos\theta = \dfrac{3}{4}$ となるので，$x = \sin\theta = \sqrt{1-\cos^2\theta} = \sqrt{1-\dfrac{3^2}{4^2}} = \dfrac{\sqrt{7}}{4}$ である．

（2） $\theta = \arccos x = \arctan 2$ とおく．θ は arccos と arctan の両方の値域に含まれるので，$0 \le \theta < \dfrac{\pi}{2}$ である．$4 = \tan^2\theta = \dfrac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta} = \dfrac{1-\cos^2\theta}{\cos^2\theta} = \dfrac{1}{\cos^2\theta} - 1$ より，$\cos^2\theta = \dfrac{1}{5}$ が成り立つので，$0 \le \theta < \dfrac{\pi}{2}$ より，$x = \cos\theta = \dfrac{1}{\sqrt{5}}$ となる．

（3） $\theta = \arcsin x = \arccos\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ とおく．θ は arcsin と arccos の両方の値域に含まれるので，$0 \le \theta \le \dfrac{\pi}{2}$ である．したがって，$x = \sin\theta \ge 0$, $\cos\theta = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$ となるので，$x = \sin\theta = \sqrt{1-\cos^2\theta} = \sqrt{1-\dfrac{1}{3}} = \sqrt{\dfrac{2}{3}} = \dfrac{\sqrt{6}}{3}$ である．

（4） $\theta = \arcsin x = \arctan\left(-\dfrac{1}{3}\right)$ とおく．θ は arcsin と arctan の両方の値域に含まれるので，$-\dfrac{\pi}{2} < \theta < \dfrac{\pi}{2}$ である．さらに，$\tan\theta = -\dfrac{1}{3} < 0$ より $-\dfrac{\pi}{2} < \theta < 0$ であり，$\sin\theta < 0$ である．ここで $\dfrac{1}{9} = \tan^2\theta = \dfrac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta} = \dfrac{1-\cos^2\theta}{\cos^2\theta} = \dfrac{1}{\cos^2\theta} - 1$ を使うと $\cos^2\theta = \dfrac{9}{10}$ となるので，$\sin\theta = -\sqrt{1-\cos^2\theta} = -\dfrac{1}{\sqrt{10}}$ が従う．

6. （１） $\cosh^2 x - \sinh^2 x = \left(\dfrac{e^x + e^{-x}}{2}\right)^2 - \left(\dfrac{e^x - e^{-x}}{2}\right)^2$

$$= \frac{1}{4}\left((e^{2x} + 2 + e^{-2x}) - (e^{2x} - 2 + e^{-2x})\right) = 1$$

$\sinh x \cosh y + \cosh x \sinh y = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}\dfrac{e^y + e^{-y}}{2} + \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}\dfrac{e^y - e^{-y}}{2}$

$$= \frac{1}{4}\left(e^{x+y} + e^{x-y} - e^{-x+y} - e^{-x-y} + e^{x+y} - e^{x-y} + e^{-x+y} - e^{-x-y}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(e^{x+y} - e^{-(x+y)}\right) = \sinh(x+y)$$

$\cosh x \cosh y + \sinh x \sinh y = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}\dfrac{e^y + e^{-y}}{2} + \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}\dfrac{e^y - e^{-y}}{2}$

$$= \frac{1}{4}\left(e^{x+y} + e^{x-y} + e^{-x+y} + e^{-x-y} + e^{x+y} - e^{x-y} - e^{-x+y} + e^{-x-y}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(e^{x+y} + e^{-(x+y)}\right) = \cosh(x+y)$$

（２） $x = \sinh\log(x + \sqrt{x^2+1})$ を示せばよい.

$\sinh\log(x + \sqrt{x^2+1}) = \dfrac{1}{2}\left(e^{\log\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)} - e^{-\log\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)}\right)$

$$= \frac{1}{2}\left(e^{\log\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)} - e^{\log\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)^{-1}}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\left(x+\sqrt{x^2+1}\right) - \left(x+\sqrt{x^2+1}\right)^{-1}\right) = \frac{1}{2}\left(x+\sqrt{x^2+1} - \frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}}\right)$$

$$= \frac{x^2 + 2x\sqrt{x^2+1} + (x^2+1) - 1}{2(x+\sqrt{x^2+1})} = \frac{2x^2 + 2x\sqrt{x^2+1}}{2(x+\sqrt{x^2+1})} = x$$

（３） $x = \tanh\left(\dfrac{1}{2}\log\dfrac{1+x}{1-x}\right)$ を示せばよい.

$\tanh\left(\dfrac{1}{2}\log\dfrac{1+x}{1-x}\right) = \tanh\log\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}} = \dfrac{e^{\log\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}} - e^{-\log\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}}}{e^{\log\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}} + e^{-\log\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}}}$

$$= \frac{e^{\log\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}} - e^{\log\left(\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\right)^{-1}}}{e^{\log\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}} + e^{\log\left(\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\right)^{-1}}} = \frac{e^{\log\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}} - e^{\log\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}}}{e^{\log\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}} + e^{\log\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}}}$$

$$= \frac{\sqrt{\frac{1+x}{1-x}} - \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}}{\sqrt{\frac{1+x}{1-x}} + \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}} = \frac{\frac{(\sqrt{1+x})^2 - (\sqrt{1-x})^2}{(1-x)(1+x)}}{\frac{(\sqrt{1+x})^2 + (\sqrt{1-x})^2}{(1-x)(1+x)}} = \frac{\frac{(1+x)-(1-x)}{1-x^2}}{\frac{(1+x)+(1-x)}{1-x^2}} = x$$

問題 3.1

1. $\displaystyle\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \lim_{x\to a}\frac{(kx+c)-(ka+c)}{x-a} = \lim_{x\to a}\frac{k(x-a)}{x-a} = k.$

2. （１） $(x^3 + 2x^2 + 3)' = 3x^2 + 4x$

（２） $((x+1)e^x)' = (x+1)'e^x + (x+1)(e^x)' = e^x + (x+1)e^x = (x+2)e^x$

（３） $(x^2\cos x)' = (x^2)'\cos x + x^2(\cos x)' = 2x\cos x - x^2\sin x$

（４） $\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)' = \dfrac{(\sin x)'x - (\sin x)(x)'}{x^2} = \dfrac{x\cos x - \sin x}{x^2}$

3. （１） $((x+1)^7)' = 7(x+1)^6\,(x+1)' = 7(x+1)^6$

（２） $((2x+1)^7)' = 7(2x+1)^6\,(2x+1)' = 7(2x+1)^6 \times 2 = 14(2x+1)^6$

（３） $(e^{2x})' = e^{2x}\,(2x)' = e^{2x}\times 2 = 2e^{2x}$

（４） $(e^{-x})' = e^{-x}\,(-x)' = e^{-x}\times(-1) = -e^{-x}$

（５） $(e^{x+1})' = e^{x+1}\,(x+1)' = e^{x+1}$

（６） $(e^{x^2})' = e^{x^2}\,(x^2)' = 2xe^{x^2}$

（７） $(\tan 2x)' = \dfrac{1}{\cos^2 2x}\,(2x)' = \dfrac{2}{\cos^2 2x}$

（８） $(\sin(e^x))' = (\cos(e^x))\,(e^x)' = e^x\cos(e^x)$

（９） $(e^{\sin x})' = e^{\sin x}\,(\sin x)' = e^{\sin x}\cos x$

4. （１） $((x+1)\log|x|)' = (x+1)'\log|x| + (x+1)(\log|x|)' = \log|x| + \dfrac{x+1}{x}$

（２） $(x^2\log|x|)' = (x^2)'\log|x| + x^2(\log|x|)' = 2x\log|x| + \dfrac{x^2}{x} = 2x\log|x| + x$

（３） $\left(\dfrac{\log|x|}{x}\right)' = \dfrac{(\log|x|)'\,x - (\log|x|)\,(x)'}{x^2} = \dfrac{\frac{1}{x}\,x - \log|x|}{x^2} = \dfrac{1-\log|x|}{x^2}$

（４） $(\log|2x|)' = \dfrac{1}{2x}\,(2x)' = \dfrac{1}{2x}\times 2 = \dfrac{1}{x}$ 　別解：$(\log|2x|)' = (\log 2 + \log|x|)' = \dfrac{1}{x}$

（５） $(\log|x+1|)' = \dfrac{1}{x+1}\,(x+1)' = \dfrac{1}{x+1}$

（６） $(\log x^2)' = \dfrac{1}{x^2}\,(x^2)' = \dfrac{1}{x^2}\,2x = \dfrac{2}{x}$ 　別解：$(\log x^2)' = (2\log|x|)' = \dfrac{2}{x}$

5. （１） $y = \arccos x$ とおくと，$x = \cos y$ より

$$(\arccos x)' = \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\dfrac{dx}{dy}} = \frac{1}{-\sin y} = -\frac{1}{\sqrt{1-\cos^2 y}} = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

（２） $y = \arctan x$ とおくと，$x = \tan y$ より

$$(\arctan x)' = \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\dfrac{dx}{dy}} = \frac{1}{\frac{1}{\cos^2 y}} = \cos^2 y = \frac{\cos^2 y}{\cos^2 y + \sin^2 y} = \frac{1}{1+\tan^2 y} = \frac{1}{1+x^2}$$

（３） $y = \arcsin\dfrac{x}{a}$ とおくと，$\dfrac{x}{a} = \sin y$ より $x = a\sin y$ である．よって，

$$\left(\arcsin\frac{x}{a}\right)' = \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\dfrac{dx}{dy}} = \frac{1}{a\cos y} = \frac{1}{a\sqrt{1-\sin^2 y}} = \frac{1}{a\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}} = \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}$$

6. （１） $\left(x^{\frac{1}{3}}\right)' = \dfrac{1}{3}x^{\frac{1}{3}-1} = \dfrac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}$

（２） $\left(x^{-\frac{1}{3}}\right)' = -\dfrac{1}{3}x^{-\frac{1}{3}-1} = -\dfrac{1}{3}x^{-\frac{4}{3}}$

（３） $\left(\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)' = \left(x^{-\frac{1}{2}}\right)' = -\dfrac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}-1} = -\dfrac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}}$

（４） $(\sqrt{x^2+1})' = \dfrac{2x}{2\sqrt{x^2+1}} = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$

（５） $(2^{2x})' = (2^{2x}\log 2)\,(2x)' = (2^{2x}\log 2)\times 2 = 2^{2x+1}\log 2$

（６） $(2^{x+1})' = (2\times 2^x)' = 2(2^x)' = 2(2^x\log 2) = 2^{x+1}\log 2$

（７） $(2^{x^2})' = (2^{x^2}\log 2)\,(x^2)' = (2^{x^2}\log 2)\times 2x = 2^{x^2+1}x\log 2$

（８） $(\log_2 x^2)' = (2\log_2 x)' = \dfrac{2}{x\log 2}$

（９） $f(x) = x^x$ とおいて $\log f(x) = \log x^x = x\log x$ の両辺を微分すると $\dfrac{f'(x)}{f(x)} = (x)'\log x + x(\log x)' = \log x + 1$ となるので，$f'(x) = (\log x + 1)f(x) = (\log x + 1)x^x$ である．

（10） $f(x) = x^{2x}$ とおいて $\log f(x) = \log x^{2x} = 2x\log x$ の両辺を微分すると $\dfrac{f'(x)}{f(x)} = (2x)'\log x + 2x(\log x)' = 2\log x + 2$ となるので，$f'(x) = (2\log x + 2)f(x) = 2(\log x + 1)x^{2x}$ である．

（11） $f(x) = x^{x^2}$ とおいて $\log f(x) = \log x^{x^2} = x^2\log x$ の両辺を微分すると $\dfrac{f'(x)}{f(x)} = (x^2)'\log x + x^2(\log x)' = 2x\log x + x$ となるので，$f'(x) = (2x\log x + x)f(x) = (2x\log x + x)x^{x^2}$ である．

(12) $f(x) = (1+x)^{\frac{1}{x}}$ とおいて $\log f(x) = \log(1+x)^{\frac{1}{x}} = \dfrac{1}{x}\log(1+x)$ の両辺を微分すると $\dfrac{f'(x)}{f(x)} = \left(\dfrac{1}{x}\right)'\log(1+x) + \dfrac{1}{x}(\log(1+x))' = -\dfrac{1}{x^2}\log(1+x) + \dfrac{1}{x}\,\dfrac{1}{1+x} = -\dfrac{\log(1+x)}{x^2} + \dfrac{1}{x(x+1)}$ となるので，$f'(x) = \left(-\dfrac{\log(1+x)}{x^2} + \dfrac{1}{x(x+1)}\right)f(x) = \left(-\dfrac{\log(1+x)}{x^2} + \dfrac{1}{x(x+1)}\right)(1+x)^{\frac{1}{x}}$ である．

7. （１） $(\sin(\cos 2x))' = \cos(\cos 2x)\,(\cos 2x)' = \cos(\cos 2x)\,(-\sin 2x)\,(2x)' = -2\sin 2x\cos(\cos 2x)$

（２） $((\sin 3x)^2)' = 2\sin 3x\,(\sin 3x)' = 2\sin 3x\cos 3x\,(3x)' = 6\sin 3x\cos 3x$

（３） $(xe^{x^2+1})' = (x)'e^{x^2+1} + x(e^{x^2+1})' = e^{x^2+1} + xe^{x^2+1}(x^2+1)' = e^{x^2+1} + xe^{x^2+1}2x = (1+2x^2)e^{x^2+1}$

（４） $(x\log(x^2+1))' = (x)'\log(x^2+1) + x(\log(x^2+1))' = \log(x^2+1) + x\dfrac{1}{x^2+1}(x^2+1)' = \log(x^2+1) + \dfrac{x}{x^2+1}2x = \log(x^2+1) + \dfrac{2x^2}{x^2+1}$

8. （１） $(\sinh x)' = \left(\dfrac{e^x - e^{-x}}{2}\right)' = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2} = \cosh x$

（２） $(\cosh x)' = \left(\dfrac{e^x + e^{-x}}{2}\right)' = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2} = \sinh x$

（３） $(\tanh x)' = \left(\dfrac{\sinh x}{\cosh x}\right)' = \dfrac{(\sinh x)'\cosh x - \sinh x(\cosh x)'}{\cosh^2 x} = \dfrac{\cosh^2 x - \sinh^2 x}{\cosh^2 x} = \dfrac{1}{\cosh^2 x}$

9. （１） $f(x) = e^x$ とおくと，$f'(x) = e^x$ より $f'(2) = e^2$．接線の方程式は，$y = e^2(x-2) + e^2 = e^2(x-1)$ より，$y = e^2(x-1)$ である．

（２） $f(x) = \log x$ とおくと，$f'(x) = \dfrac{1}{x}$ より $f'(2) = \dfrac{1}{2}$．接線の方程式は，$y = \dfrac{1}{2}(x-2) + \log 2 = \dfrac{x}{2} + \log 2 - 1$ より，$y = \dfrac{x}{2} + \log 2 - 1$ である．

（３） $f(x) = \sqrt{x}$ とおくと，$f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ より $f'(2) = \dfrac{1}{2\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{4}$．接線の方程式は，$y = \dfrac{\sqrt{2}}{4}(x-2) + \sqrt{2} = \dfrac{\sqrt{2}}{4}x - \dfrac{\sqrt{2}}{2} + \sqrt{2} = \dfrac{\sqrt{2}}{4}x + \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ より，$y = \dfrac{\sqrt{2}}{4}x + \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ である．

（４） $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ とおくと，$f'(x) = -\dfrac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}}$ より $f'(2) = -\dfrac{1}{2}2^{-\frac{3}{2}} = -\dfrac{1}{2}\,\dfrac{1}{2\sqrt{2}} = -\dfrac{\sqrt{2}}{8}$．接線の方程式は，$y = -\dfrac{\sqrt{2}}{8}(x-2) + \dfrac{1}{\sqrt{2}} = -\dfrac{\sqrt{2}}{8}x + \dfrac{\sqrt{2}}{4} + \dfrac{\sqrt{2}}{2} = -\dfrac{\sqrt{2}}{8}x + \dfrac{3\sqrt{2}}{4}$ より，$y = -\dfrac{\sqrt{2}}{8}x + \dfrac{3\sqrt{2}}{4}$ である．

（５） $f(x) = e^{2x}$ とおくと，$f'(x) = 2e^{2x}$ より $f'(2) = 2e^4$．接線の方程式は，$y = 2e^4(x-2) + e^4 = e^4(2x-3)$ より，$y = e^4(2x-3)$ である．

（６） $f(x) = \log 2x$ とおくと，$f'(x) = \dfrac{1}{x}$ より $f'(2) = \dfrac{1}{2}$．接線の方程式は，$y = \dfrac{1}{2}(x-2) + \log 4 = \dfrac{x}{2} + \log 4 - 1$ より，$y = \dfrac{x}{2} + \log 4 - 1$ である．

（７） $f(x) = \log|x-4|$ とおくと，$f'(x) = \dfrac{1}{x-4}$ より $f'(2) = -\dfrac{1}{2}$．接線の方程式は，$y = -\dfrac{1}{2}(x-2) + \log 2 = -\dfrac{x}{2} + \log 2 + 1$ より，$y = -\dfrac{x}{2} + \log 2 + 1$ である．

（８） $f(x) = \sin\pi x$ とおくと，$f'(x) = \pi\cos\pi x$ より，$f'(2) = \pi\cos 2\pi = \pi$．接線の方程式は，$y = \pi(x-2) + \sin 2\pi = \pi(x-2)$ より，$y = \pi(x-2)$ である．

（９） $f(x) = \cos\dfrac{\pi}{x^2}$ とおくと，$f'(x) = -\sin\dfrac{\pi}{x^2}\left(\dfrac{\pi}{x^2}\right)' = -\sin\dfrac{\pi}{x^2}\left(-\dfrac{2\pi}{x^3}\right) = \dfrac{2\pi}{x^3}\sin\dfrac{\pi}{x^2}$ より $f'(2) = \dfrac{\pi}{4}\sin\dfrac{\pi}{4} = \dfrac{\pi}{4}\,\dfrac{\sqrt{2}}{2} = \dfrac{\sqrt{2}\pi}{8}$．接線の方程式は，$y = \dfrac{\sqrt{2}\pi}{8}(x-2) + \cos\dfrac{\pi}{4} = \dfrac{\sqrt{2}\pi}{8}x -$

$\dfrac{\sqrt{2}\pi}{4}+\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ より，$y=\dfrac{\sqrt{2}\pi}{8}x-\dfrac{\sqrt{2}\pi}{4}+\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ である．

10. $f(x)+g(x)$ について示す．$f(x)$, $g(x)$ が I において微分可能であることから，

$$\begin{aligned}(f(x)\pm g(x))' &= \lim_{h\to 0}\frac{(f(x+h)\pm g(x+h))-(f(h)\pm g(h))}{h}\\ &= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(h)}{h}\pm\lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)-g(h)}{h}=f'(x)\pm g'(x)\end{aligned}$$

より $f(x)+g(x)$ は I において微分可能であり，$(f(x)+g(x))'=f'(x)+g'(x)$ が成り立つ．$f(x)-g(x)$ についても同様に示すことができる．

11. $(f(x)g(x)h(x))'=(f(x)\,(g(x)h(x)))'=f'(x)\,g(x)h(x)+f(x)\,(g(x)h(x))'$
$=f'(x)g(x)h(x)+f(x)g'(x)h(x)+f(x)g(x)h'(x)$

12. $g(x)$ は I において微分可能であり，$g(x)>0$ を満たすので，定理 3.1.9 より $y=\log x$ との合成関数 $\log g(x)$ は I において微分可能である．また，$h(x)$ も I において微分可能であることから，定理 3.1.7 (3) より，$\log g(x)^{h(x)}=h(x)\log g(x)$ は I において微分可能である．対数関数は指数関数の逆関数であることから，p.27 の等式より

$$f(x)=g(x)^{h(x)}=e^{\log g(x)^{h(x)}}$$

が成り立つ．よって，$f(x)=g(x)^{h(x)}$ は $y=e^x$ と $\log g(x)^{h(x)}$ の合成関数である．$y=e^x$ は $\mathbf{R}$ において微分可能であるから，定理 3.1.9 より主張が従う．

13. $x(t)=t-\sin t,\ y(t)=1-\cos t$ とおくと，$x'(t)=1-\cos t,\ y'(t)=\sin t$ であり，定理 3.1.24 より，$t=\dfrac{\pi}{4}$ における接線の傾きは $\dfrac{y'(\frac{\pi}{4})}{x'(\frac{\pi}{4})}=\dfrac{\sin\frac{\pi}{4}}{1-\cos\frac{\pi}{4}}=\dfrac{\frac{1}{\sqrt{2}}}{1-\frac{1}{\sqrt{2}}}=\dfrac{1}{\sqrt{2}-1}=\sqrt{2}+1$ である．
$x\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=\dfrac{\pi}{4}-\sin\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{1}{\sqrt{2}},\ y\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=1-\cos\dfrac{\pi}{4}=1-\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ であるから，接線の方程式は，

$$y=(\sqrt{2}+1)\left(x-\frac{\pi}{4}+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)+1-\frac{1}{\sqrt{2}}=(\sqrt{2}+1)\left(x-\frac{\pi}{4}\right)+2$$

より，$y=(\sqrt{2}+1)\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)+2$ である．

14. $x\neq 0$ において，$\dfrac{1}{x}$ は C^1 級であり，$\sin x$ との合成関数 $\sin\dfrac{1}{x}$ も C^1 級である．よって，x^3 との積として得られる関数 $f(x)$ は，$x\neq 0$ において C^1 級である．$f(x)$ が $x=0$ において C^1 級であることを確認する．$g(x)=x^3\sin\dfrac{1}{x}$ とおく．$g'(x)=3x^2\sin\dfrac{1}{x}+x^3\cos\dfrac{1}{x}\left(-\dfrac{1}{x^2}\right)=3x^2\sin\dfrac{1}{x}-x\cos\dfrac{1}{x}$ より，$\displaystyle\lim_{x\to 0+0}g'(x)=\lim_{x\to 0-0}g'(x)=0$ が成り立つ．また，$\displaystyle\lim_{x\to 0\pm 0}\frac{g(x)-g(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0\pm 0}x^2\sin\frac{1}{x}=0$ より $g'(0)=0$ である．よって，$g'(x)$ は $x=0$ において連続であり，$f(x)$ は $x=0$ において C^1 級であることが従う．

15. $x\neq 0$ では C^1 級なので，$x=0$ において C^1 級かを確認すればよい．$n=1$ のとき，$x>0$ において $f'(x)=1$ であり，$x<0$ において $f'(x)=0$ である．したがって $\displaystyle\lim_{x\to 0+0}f'(x)=1$ と $\displaystyle\lim_{x\to 0-0}f'(x)=0$ は一致しないので，微分可能ではない．特に C^1 級ではない．$n\geq 2$ のとき，$x>0$ において $f'(x)=nx^{n-1}$ であり，$x<0$ において $f'(x)=0$ である．したがって $\displaystyle\lim_{x\to 0+0}f'(x)=\lim_{x\to 0-0}f'(x)=0$ が成り立つ．また，$\displaystyle\lim_{x\to 0\pm 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=0$ より $f'(0)=0$ である．よって，$f(x)$ は C^1 級である．以上より，$f(x)$ が C^1 級関数であるための必要十分条件は $n\geq 2$ である．

16. $(x(t),y(t))=(a\cos t,b\sin t)$ を楕円の式の左辺に代入すると，$\left(\dfrac{x}{a}\right)^2+\left(\dfrac{y}{b}\right)^2=\cos^2 t+\sin^2 t=1$ となる．よって，$(x(t),y(t))=(a\cos t,b\sin t)$ は楕円のパラメータ表示を与えている．(p,q) におけるパラメータを $t=s$ とする．つまり，$p=a\cos s,\ q=b\sin s$ である．定理 3.1.24 より，$t=s$ における接線の傾

きは $\dfrac{y'(s)}{x'(s)} = \left.\dfrac{(b\sin t)'}{(a\cos t)'}\right|_{t=s} = -\dfrac{b\cos s}{a\sin s} = -\dfrac{b^2p}{a^2q}$ となる．よって，接線の方程式は $y = -\dfrac{b^2p}{a^2q}(x-p)+q$ であり，$b^2p(x-p)+a^2q(y-q)=0$ が得られる．これを変形して $b^2px+a^2qy=b^2p^2+a^2q^2$ として，両辺を a^2b^2 で割ると，$\dfrac{p\,x}{a^2}+\dfrac{q\,y}{b^2}=\dfrac{p^2}{a^2}+\dfrac{q^2}{b^2}=1$ となる．よって，接線は $\dfrac{p\,x}{a^2}+\dfrac{q\,y}{b^2}=1$ で与えられる．

17. サイクロイドの形は曲線のパラメータの付け方を変えても変化しない．そこで，円の中心の位置が $(t,1)$ にあるときの時間が t となるようにパラメータを付けておく．このとき，サイクロイドの「印」の位置は円の中心から見て $\left(\cos\left(\dfrac{3\pi}{2}-t\right), \sin\left(\dfrac{3\pi}{2}-t\right)\right)$ の位置にある．よって，「印」の x 座標は $t+\cos\left(\dfrac{3\pi}{2}-t\right) = t+\cos\dfrac{3\pi}{2}\cos t+\sin\dfrac{3\pi}{2}\sin t = t-\sin t$ であり，「印」の y 座標は $1+\sin\left(\dfrac{3\pi}{2}-t\right) = 1+\sin\dfrac{3\pi}{2}\cos t - \cos\dfrac{3\pi}{2}\sin t = 1-\cos t$ となるので，$(x,y)=(t-\sin t, 1-\cos t)$ がサイクロイドのパラメータ表示であることが従う．

問題 3.2

1. （１） $(x^3-3x+1)' = 3x^2-3 = 3(x-1)(x+1) = 0$ より，$x=-1,1$

（２） $(x^4-4x^3+8x)' = 4x^3-12x^2+8 = 4(x-1)(x^2-2x-2) = 0$ であり，$x^2-2x-2=0$ の解は $x=\dfrac{2\pm\sqrt{4+8}}{2} = 1\pm\sqrt{3}$ である．よって，$x=1, 1+\sqrt{3}, 1-\sqrt{3}$

（３） $(\sin x)' = \cos x = 0$ より，$x=\dfrac{\pi}{2}+n\pi$ （$n\in\mathbf{Z}$）

（４） $(xe^{-x})' = e^{-x}-xe^{-x} = (1-x)e^{-x} = 0$ より，$x=1$

2. 定理 3.2.9 より，導関数の値が正であることを示せばよい．

（１） $(x+1)'=1>0$

（２） $(e^x)'=e^x>0$

（３） $(\log x)' = \dfrac{1}{x} > 0$

（４） $x>0$ において $(\sqrt{x})' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}} > 0$ である．$x=0$ のときの値は 0 だから，$x>0$ について $0<\sqrt{x}$ が成り立つ．よって，$\sqrt{x}$ は $x\geq 0$ において狭義単調増加である．

3. 定理 3.2.9 より，導関数の値が負であることを示せばよい．

（１） $(-x+1)' = -1 < 0$

（２） $(e^{-x})' = -e^{-x} < 0$

（３） $\left(\log\dfrac{1}{x}\right)' = \left(\log x^{-1}\right)' = (-\log x)' = -\dfrac{1}{x} < 0$

（４） $\left(\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)' = \left(x^{-\frac{1}{2}}\right)' = -\dfrac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}} < 0$

4. $f(x)=x^3-2x^2$ より，$f'(x)=3x^2-4x=x(3x-4)$ である．よって，$x<0$ および $x>\dfrac{4}{3}$ のとき $f'(x)>0$ であり，$f(x)$ は狭義単調増加である．また，$0<x<\dfrac{4}{3}$ のとき $f'(x)<0$ であり，$f(x)$ は狭義単調減少である．十分小さい $\varepsilon>0$ に対し，$f(0-\varepsilon)<f(0)$，$f(0+\varepsilon)<f(0)$ が成り立つので，$f(x)$ は $x=0$ において極大である．また，$f\left(\dfrac{4}{3}-\varepsilon\right) > f\left(\dfrac{4}{3}\right)$，$f\left(\dfrac{4}{3}+\varepsilon\right) > f\left(\dfrac{4}{3}\right)$ が成り立つので，$f(x)$ は $x=\dfrac{4}{3}$ において極小である．よって，$f(x)$ は $x=0,\dfrac{4}{3}$ において極値をもつ．

（１） $f(x)$ は $x=0$ において極値をもつ．$x=0$ において最大である．$x\to-\infty$ としたとき，$f(x)$ の値は限りなく小さくなるので，最小は存在しない．

（２） $f(x)$ は $x=0,\dfrac{4}{3}$ において極値をもつ．$f(2)=8-8=0$ は $f(0)=0$ と一致するので，$x=0$ において最大である．$x\to-\infty$ としたとき，$f(x)$ の値は限りなく小さくなるので，最小は存在しない．

（３） $f(x)$ は $x=0,\dfrac{4}{3}$ において極値をもつ．$f(3)=27-18=9>0$ は $f(0)=0$ より大きいため，

$x=0$ において最大ではない．また，$x=3$ は I に含まれていない．よって，最大は存在しない．$x\to-\infty$ としたとき，$f(x)$ の値は限りなく小さくなるので，最小も存在しない．

（4） $f(x)$ は $x=0,\dfrac{4}{3}$ において極値をもつ．$f(3)=27-18=9>0$ は $f(0)=0$ より大きいため，$x=3$ において最大である．$x\to-\infty$ としたとき，$f(x)$ の値は限りなく小さくなるので，最小は存在しない．

5. $f'(x)=(x^3)'(x-1)^3+x^3((x-1)^3)'=3x^2(x-1)^3+x^3\ 3(x-1)^2=3x^2(x-1)^2(2x-1)=0$ より，$x=0,\dfrac{1}{2},1$ において $f'(x)=0$ となる．$f(x)$ は $x\le\dfrac{1}{2}$ のとき $f'(x)\le 0$ より単調減少であり，$x\ge\dfrac{1}{2}$ のとき $f'(x)\ge 0$ より単調増加である．よって，$x=\dfrac{1}{2}$ のとき $f(x)$ は最小である．特に，$f(x)$ は $x=\dfrac{1}{2}$ のとき極小であり，極大は存在しない．$x\to\infty$ としたとき，$f(x)$ の値は限りなく大きくなるので，最大は存在しない．

6. $f(x)$ は狭義単調増加なので，任意の $a,b\in I$ に対し，$a<b$ ならば $f(a)<f(b)$ が成り立つ．また，$a\ge b$ ならば $f(a)\ge f(b)$ となることから，$f(a)<f(b)$ ならば $a<b$ である．よって，$a<b$ であることと $f(a)<f(b)$ であることは同値である．$p=f(a),\ q=f(b)$ とおくと，$f^{-1}(p)<f^{-1}(q)$ であることと $p<q$ であることが同値となる．よって，逆関数 f^{-1} は狭義単調増加である．

$f(x)$ は狭義単調減少とすると，任意の $a,b\in I$ に対し，$a<b$ ならば $f(a)>f(b)$ が成り立つ．また，$a\ge b$ ならば $f(a)\le f(b)$ となることから，$f(a)>f(b)$ ならば $a<b$ である．よって，$a<b$ であることと $f(a)>f(b)$ であることは同値である．$p=f(a),\ q=f(b)$ とおくと，$f^{-1}(p)>f^{-1}(q)$ であることと $p<q$ であることが同値となる．よって，逆関数 f^{-1} は狭義単調減少である．

7. （1） $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{1-\cos x}{x}=\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{1}=0$

（2） $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\log(1+x)}{x}=\lim_{x\to0}\frac{\frac{1}{1+x}}{1}=1$

（3） $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{e^x-1}{x}=\lim_{x\to0}\frac{e^x}{1}=1$

（4） $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{e^x-x-1}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{e^x-1}{2x}=\lim_{x\to0}\frac{e^x}{2}=\frac{1}{2}$

8. $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\log(1+x)}{1+x}=0$ の分母は $x=0$ において 0 にならないため，ロピタルの定理の条件を満たしていない．

問題 3.3

1. （1） $(xe^x)''=(e^x+xe^x)'=e^x+e^x+xe^x=(x+2)e^x$

（2） $(xe^{-x})''=(e^{-x}-xe^{-x})'=-e^{-x}-e^{-x}+xe^{-x}=(x-2)e^{-x}$

（3） $(x\log x)''=(\log x+1)'=\dfrac{1}{x}$

（4） $x\log\dfrac{1}{x}=x\log x^{-1}=-x\log x$ より，$\left(x\log\dfrac{1}{x}\right)''=-\dfrac{1}{x}$

（5） $(x\sin x)''=(\sin x+x\cos x)'=\cos x+\cos x-x\sin x=2\cos x-x\sin x$

（6） $(x\cos x)''=(\cos x-x\sin x)'=-\sin x-\sin x-x\cos x=-2\sin x-x\cos x$

（7） $$\left(\frac{e^x}{x}\right)''=\left(\frac{xe^x-e^x}{x^2}\right)'=\frac{(xe^x-e^x)'\,x^2-(xe^x-e^x)\,2x}{x^4}$$
$$=\frac{(e^x+xe^x-e^x)x-2(xe^x-e^x)}{x^3}=\frac{(x^2-2x+2)e^x}{x^3}$$

（8） $$\left(\frac{e^{-x}}{x}\right)''=\left(\frac{-xe^{-x}-e^{-x}}{x^2}\right)'=\frac{(-xe^{-x}-e^{-x})'x^2-(-xe^{-x}-e^{-x})\,2x}{x^4}$$
$$=\frac{(-e^{-x}+xe^{-x}+e^{-x})x+2(xe^{-x}+e^{-x})}{x^3}=\frac{(x^2+2x+2)e^{-x})}{x^3}$$

（9） $$\left(\frac{\log x}{x}\right)''=\left(\frac{1-\log x}{x^2}\right)'=\frac{-\frac{1}{x}\,x^2-(1-\log x)\,2x}{x^4}=\frac{-3+2\log x}{x^3}$$

(10) $\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)'' = \left(\dfrac{x\cos x - \sin x}{x^2}\right)' = \dfrac{(x\cos x - \sin x)'x^2 - (x\cos x - \sin x)\,2x}{x^4}$
$= \dfrac{(\cos x - x\sin x - \cos x)x - 2(x\cos x - \sin x)}{x^3} = \dfrac{-(x^2-2)\sin x - 2x\cos x}{x^3}$

(11) $\left(\dfrac{\cos x}{x}\right)'' = \left(\dfrac{-x\sin x - \cos x}{x^2}\right)' = \dfrac{(-x\sin x - \cos x)'x^2 - (-x\sin x - \cos x)\,2x}{x^4}$
$= \dfrac{(-\sin x - x\cos x + \sin x)x + 2(x\sin x + \cos x)}{x^3} = \dfrac{2x\sin x + (2-x^2)\cos x}{x^3}$

(12) $(e^x\sin x)' = e^x\sin x + e^x\cos x = e^x(\sin x + \cos x)$ より，$(e^x\sin x)'' = (e^x(\sin x + \cos x))' = e^x(\sin x + \cos x) + e^x(\cos x - \sin x) = 2e^x\cos x$

(13) $(e^x\log x)' = e^x\log x + e^x\dfrac{1}{x} = e^x\left(\dfrac{1}{x} + \log x\right)$ より，$(e^x\log x)'' = \left(e^x\left(\dfrac{1}{x} + \log x\right)\right)' = e^x\left(\dfrac{1}{x} + \log x\right) + e^x\left(-\dfrac{1}{x^2} + \dfrac{1}{x}\right) = e^x\left(\dfrac{2}{x} - \dfrac{1}{x^2} + \log x\right)$

(14) $(\tan x)'' = \left(\dfrac{1}{\cos^2 x}\right)' = ((\cos x)^{-2})' = -2(\cos x)^{-3}(\cos x)' = -2(\cos x)^{-3}(-\sin x) = \dfrac{2\sin x}{\cos^3 x}$

(15) $\left(\dfrac{\cos x}{\sin x}\right)' = \dfrac{-\sin^2 x - \cos^2 x}{\sin^2 x} = \dfrac{-1}{\sin^2 x}$ より，$\left(\dfrac{\cos x}{\sin x}\right)'' = \left(\dfrac{-1}{\sin^2 x}\right)' = -((\sin x)^{-2})' = 2(\sin x)^{-3}(\sin x)' = \dfrac{2\cos x}{\sin^3 x}$

(16) $(\sqrt{x})'' = \left(\dfrac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}\right)' = \dfrac{1}{2}\left(-\dfrac{1}{2}\right)x^{-\frac{3}{2}} = -\dfrac{1}{4}x^{-\frac{3}{2}}$

2. 定理 3.3.1 より，2 次導関数の値が正であることを示せばよい．

(1) $(x^2)'' = (2x)' = 2 > 0$

(2) $(e^x)'' = (e^x)' = e^x > 0$

(3) $(e^{-x})'' = (-e^{-x})' = e^{-x} > 0$

(4) $\left(\log\dfrac{1}{x}\right)'' = (-\log x)'' = \left(-\dfrac{1}{x}\right)' = \dfrac{1}{x^2} > 0$

(5) $\left(\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)'' = \left(x^{-\frac{1}{2}}\right)'' = \left(-\frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}}\right)' = \frac{1}{2}\,\frac{3}{2}x^{-\frac{5}{2}} = \frac{3}{4}x^{-\frac{5}{2}} > 0$

(6) $\left(x^{\frac{3}{2}}\right)'' = \left(\frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}\right)' = \frac{3}{2}\,\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = \frac{3}{4}x^{-\frac{1}{2}} > 0$

3. 定理 3.3.1 より，2 次導関数の値が負であることを示せばよい．

(1) $(-x^2)'' = (-2x)' = -2 < 0$

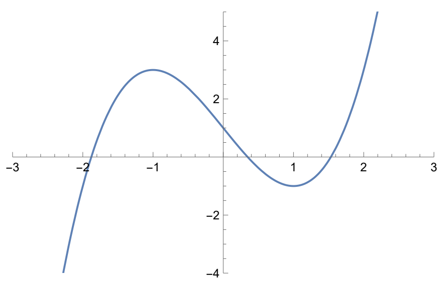
(2) $(\log x)'' = \left(\dfrac{1}{x}\right)' = -\dfrac{1}{x^2} < 0$

(3) $(\sqrt{x})'' = \left(x^{\frac{1}{2}}\right)'' = \left(\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}\right)' = \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)x^{-\frac{3}{2}} = -\frac{1}{4}x^{-\frac{3}{2}} < 0$

(4) $\left(x^{\frac{2}{3}}\right)'' = \left(\dfrac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}\right)' = \dfrac{2}{3}\left(-\dfrac{1}{3}\right)x^{-\frac{4}{3}} = -\dfrac{2}{9}x^{-\frac{4}{3}} < 0$

4. (1) $(x^3-3x+1)' = 3x^2-3 = 3(x-1)(x+1)$, $(x^3-3x+1)'' = 6x$ より，増減表は次の左図のようになる．$x=-1,1$ のとき極値であり，$x=0$ のとき変曲点となる．

x		-1		0		1	
$f'(x)$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$f''(x)$	$-$	$-$	$-$	1	$+$	$+$	$+$
$f(x)$	↗	3	↘		↘	-1	↗



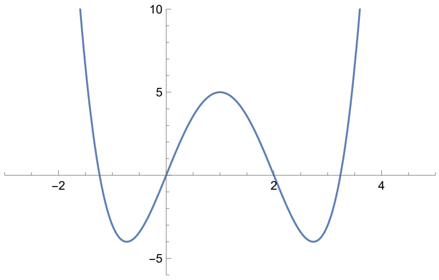
関数のグラフは上の右図のようになる．$x=-1$ のとき極大．$x=1$ のとき極小．最大，最小は存在し

ない．

(2)　$(x^4-4x^3+8x)'=4x^3-12x^2+8=4(x-1)(x-(1-\sqrt{3}))(x-(1+\sqrt{3}))$, $(x^4-4x^3+8x)''=12x^2-24x=12x(x-2)$ より，増減表は次のようになる．$x=1-\sqrt{3},1,1+\sqrt{3}$ のとき極値であり，$x=0,2$ のときに変曲点となる．

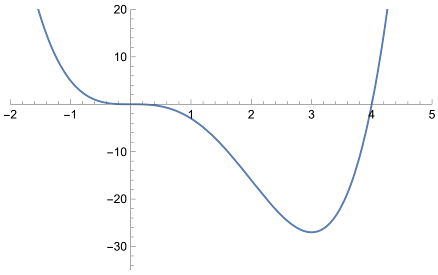
x		$1-\sqrt{3}$		0		1		2		$1+\sqrt{3}$	
$f'(x)$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$f''(x)$	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$f(x)$	↘	-4	↗	0	↗	5	↘	0	↘	-4	↗

関数のグラフは下図のようになる．$x=1$ のとき極大．最大は存在しない．$x=1\pm\sqrt{3}$ のとき極小かつ最小．



(3)　$(x^4-4x^3)'=4x^3-12x^2=4x^2(x-3)$, $(x^4-4x^3)''=12x^2-24x=12x(x-2)$ より，増減表は次の左図のようになる．$x=3$ のとき極値であり，$x=0,2$ のときに変曲点となる．

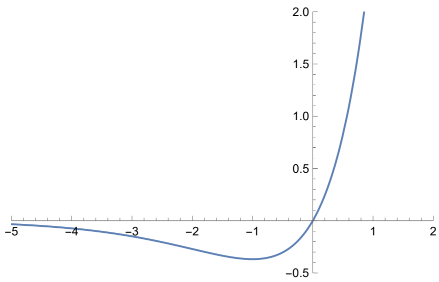
x		0		2		3	
$f'(x)$	$-$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$f''(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$f(x)$	↘	0	↘	-16	↘	-27	↗



関数のグラフは上の右図のようになる．極大，最大は存在しない．$x=3$ のとき極小かつ最小．

5.　(1)　$(xe^x)'=e^x+xe^x=(x+1)e^x$, $(xe^x)''=e^x+(x+1)e^x=(x+2)e^x$ より，増減表は次の左図のようになる．$x=-1$ のとき極値であり，$x=-2$ のとき変曲点となる．

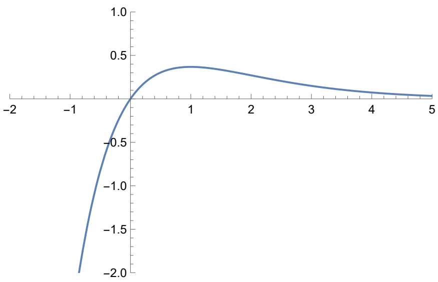
x		-2		-1	
$f'(x)$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$f''(x)$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$f(x)$	↘	$-2e^{-2}$	↘	$-e^{-1}$	↗



$x=-t$ とおくと，$\displaystyle\lim_{x\to-\infty}xe^x=\lim_{t\to\infty}\frac{-t}{e^t}=0$．また，$\displaystyle\lim_{x\to\infty}xe^x=\infty$ である．よって，関数のグラフは上の右図のようになる．極大，最大は存在しない．$x=-1$ のとき極小かつ最小．

(2)　$(xe^{-x})'=e^{-x}-xe^{-x}=(1-x)e^{-x}$, $(xe^{-x})''=-e^{-x}-(1-x)e^{-x}=(x-2)e^{-x}$ より，増減表は次の左図のようになる．$x=1$ のとき極値であり，$x=2$ のとき変曲点となる．

x		1		2	
$f'(x)$	$+$	0	$-$	$-$	$-$
$f''(x)$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	e^{-1}	↘	$2e^{-2}$	↘

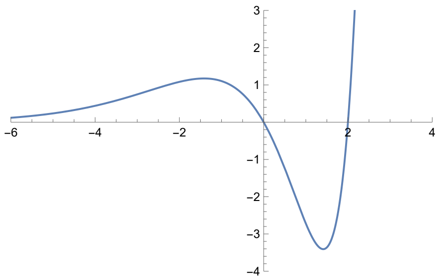


$\displaystyle\lim_{x\to-\infty} xe^{-x} = -\infty$, $\displaystyle\lim_{x\to\infty} xe^{-x} = 0$ である．よって，関数のグラフは上の右図のようになる．$x = 1$ のとき極大かつ最大．極小，最小は存在しない．

(3) $(x(x-2)e^x)' = ((x^2-2x)e^x)' = (2x-2)e^x + (x^2-2x)e^x = (x^2-2)e^x$, $(x(x-2)e^x)'' = 2xe^x + (x^2-2)e^x = (x^2+2x-2)e^x$ より，増減表は次のようになる．$f(x)$ の欄は小数点以下 2 桁の近似値を書いている．$x = \pm\sqrt{2}$ のとき極値であり，$x = -1\pm\sqrt{3}$ のとき変曲点となる．

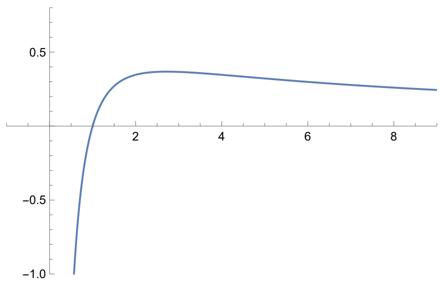
x		$-1-\sqrt{3}$		$-\sqrt{2}$		$-1+\sqrt{3}$		$\sqrt{2}$	
$f'(x)$	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$f''(x)$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$f(x)$	↗	0.84	↗	1.17	↘	-1.93	↘	-3.41	↗

$x = -t$ とおくと，$\displaystyle\lim_{x\to-\infty} x(x-2)e^x = \lim_{t\to\infty}\frac{-t(-t-2)}{e^t} = 0$．また，$\displaystyle\lim_{x\to\infty} x(x-2)e^x = \infty$ である．よって，関数のグラフは下図のようになる．$x = -\sqrt{2}$ のとき極大．最大はなし．$x = \sqrt{2}$ のとき極小かつ最小．



(4) $\displaystyle\left(\frac{\log x}{x}\right)' = \frac{1-\log x}{x^2}$, $\displaystyle\left(\frac{\log x}{x}\right)'' = \frac{-x-2x(1-\log x)}{x^4} = \frac{-3+2\log x}{x^3}$ より，増減表は次の左図のようになる．$x = e$ のとき極値であり，$x = e^{\frac{3}{2}}$ のとき変曲点となる．

x	0		e		$e^{\frac{3}{2}}$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$	$-$	$-$
$f''(x)$		$-$	$-$	$-$	0	$+$
$f(x)$		↗	e^{-1}	↘	$\frac{3}{2}e^{-\frac{3}{2}}$	↘



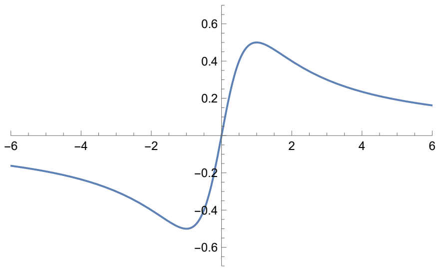
$x = e^{-t}$ とおくと，$\displaystyle\lim_{x\to0+0}\frac{\log x}{x} = \lim_{t\to\infty}(-te^t) = -\infty$．また，$x = e^t$ とおくと，$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{t}{e^t} = 0$ である．よって，関数のグラフは上の右図のようになる．$x = e$ のとき極大かつ最大．極小，最小は存在しない．

(5) $\displaystyle\left(\frac{x}{x^2+1}\right)' = \frac{(x^2+1)-2x^2}{(x^2+1)^2} = \frac{1-x^2}{(x^2+1)^2}$, $\displaystyle\left(\frac{x}{x^2+1}\right)'' = \frac{-2x(x^2+1)^2-4x(1-x^2)(x^2+1)}{(x^2+1)^4} = \frac{-2x^3-2x-4x+4x^3}{(x^2+1)^3} = \frac{2x(x^2-3)}{(x^2+1)^3}$ より，増減表は次のようになる．$x = \pm1$ のとき極値であり，

$x=0,\pm\sqrt{3}$ のとき変曲点となる．

x		$-\sqrt{3}$		-1		0		1		$\sqrt{3}$	
$f'(x)$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$
$f''(x)$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	$-\frac{\sqrt{3}}{4}$	↘	$-\frac{1}{2}$	↗	0	↗	$\frac{1}{2}$	↘	$\frac{\sqrt{3}}{4}$	↘

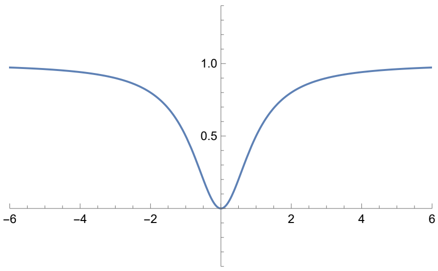
$\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\frac{x}{x^2+1}=\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x+\frac{1}{x}}=0,\ \lim_{x\to\infty}\frac{x}{x^2+1}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x+\frac{1}{x}}=0$ より，関数のグラフは下図のようになる．$x=1$ のとき極大かつ最大．$x=-1$ のとき極小かつ最小．



（6） $\displaystyle\left(\frac{x^2}{x^2+1}\right)'=\frac{2x(x^2+1)-2x^3}{(x^2+1)^2}=\frac{2x}{(x^2+1)^2}$，

$\displaystyle\left(\frac{x^2}{x^2+1}\right)''=\frac{2(x^2+1)^2-8x^2(x^2+1)}{(x^2+1)^4}=\frac{2(x^2+1)-8x^2}{(x^2+1)^3}=\frac{2(1-3x^2)}{(x^2+1)^3}$ より，増減表は次の左図のようになる．$x=0$ のとき極値であり，$x=\pm\frac{1}{\sqrt{3}}$ のとき変曲点となる．

x		$-\frac{1}{\sqrt{3}}$		0		$\frac{1}{\sqrt{3}}$	
$f'(x)$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$f''(x)$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	0	$-$
$f(x)$	↘	$\frac{1}{4}$	↘	0	↗	$\frac{1}{4}$	↗



$\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2}{x^2+1}=\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{1+\frac{1}{x^2}}=1,\ \lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{x^2+1}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{1+\frac{1}{x^2}}=1$ より，関数のグラフは上の右図のようになる．極大，最大は存在しない．$x=0$ のとき極小かつ最小．

6. $f'(x)=2x$ より，数列 $\{a_n\}$ は漸化式 $a_{n+1}=a_n-\dfrac{a_n^2-2}{2a_n}$ により定まる．$\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n=a$ とすると，$n\to\infty$ としたとき，漸化式より $a=a-\dfrac{a^2-2}{2a}$ が得られる．これを解くと，$a=\pm\sqrt{2}$ となる．ここで，第 n 項 a_n が正であると仮定すると，$a_{n+1}=a_n-\dfrac{a_n^2-2}{2a_n}=\dfrac{a_n^2+2}{2a_n}>0$ より，第 $n+1$ 項も正である．したがって，初項 a_0 は正であることから，任意の n に対して $a_n>0$ が成り立つ．よって，$a=\sqrt{2}$ である．

問題 3.4

1. （1） $f(x)=e^{-x}$ とおくと，$f'(x)=-e^{-x}$，$f''(x)=e^{-x}$，$f^{(3)}(x)=-e^{-x}$，$f^{(4)}(x)=e^{-x}$
   （2） $f(x)=\sin x$ とおくと，$f'(x)=\cos x$，$f''(x)=-\sin x$，$f^{(3)}(x)=-\cos x$，$f^{(4)}(x)=\sin x$
   （3） $f(x)=\cos x$ とおくと，$f'(x)=-\sin x$，$f''(x)=-\cos x$，$f^{(3)}(x)=\sin x$，$f^{(4)}(x)=\cos x$
   （4） $f(x)=\sin^2 x$ とおくと，$f'(x)=2\sin x\cos x=\sin 2x$，$f''(x)=2\cos 2x$，$f^{(3)}(x)=-4\sin 2x$，$f^{(4)}(x)=-8\cos 2x$
2. （1） $f(x)=x^3$ とおくと，$f'(x)=3x^2$，$f''(x)=6x$，$f^{(3)}(x)=6$，$f^{(4)}(x)=f^{(5)}(x)=0$

（2） $f(x)=x^5$ とおくと，$f'(x)=5x^4$, $f''(x)=20x^3$, $f^{(3)}(x)=60x^2$, $f^{(4)}(x)=120x$, $f^{(5)}(x)=120$

（3） $f(x)=x^7$ とおくと，$f'(x)=7x^6$, $f''(x)=42x^5$, $f^{(3)}(x)=210x^4$, $f^{(4)}(x)=840x^3$, $f^{(5)}(x)=2520x^2$

（4） $f(x)=(x+1)^7$ とおくと，$f'(x)=7(x+1)^6$, $f''(x)=42(x+1)^5$, $f^{(3)}(x)=210(x+1)^4$, $f^{(4)}(x)=840(x+1)^3$, $f^{(5)}(x)=2520(x+1)^2$

3. （1） $f(x)=e^x$ とおくと，$f^{(n)}(x)=e^x$

（2） $f(x)=e^{2x}$ とおくと，$f^{(n)}(x)=2^ne^{2x}$

（3） $f(x)=e^{-x}$ とおくと，$f^{(n)}(x)=(-1)^ne^{-x}$

（4） $f(x)=xe^{-x}$ とおくと，$f'(x)=(1-x)e^{-x}$, $f''(x)=(x-2)e^{-x}$, $f^{(3)}(x)=(3-x)e^{-x}$ より，$f^{(n)}(x)=(-1)^n(x-n)e^{-x}$ と予想できる．これを数学的帰納法により証明する．$n=0$ のとき，$f^{(0)}(x)=(-1)^0(x-0)e^{-x}=xe^{-x}$ より式は成立する．$n=k$ において $f^{(k)}(x)=(-1)^k(x-k)e^{-x}$ が成り立つと仮定すると，

$$f^{(k+1)}(x)=(f^{(k)}(x))'=((-1)^k(x-k)e^{-x})'$$

$$=(-1)^k(e^{-x}-(x-k))e^{-x}=(-1)^{k+1}(x-(k+1))e^{-x}$$

より $n=k+1$ のときの式が従う．よって，$f^{(n)}(x)=(-1)^n(x-n)e^{-x}$ である．

4. （1） $f(x)=\dfrac{1}{x}$ とおく．$n=0$ のとき，$f^{(0)}(x)=\dfrac{(-1)^0 0!}{x^{0+1}}=\dfrac{1}{x}$ より式は成立する．$n=k$ において $f^{(k)}(x)=\dfrac{(-1)^k k!}{x^{k+1}}$ が成り立つと仮定すると，

$$f^{(k+1)}(x)=(f^{(k)}(x))'=\left(\frac{(-1)^k k!}{x^{k+1}}\right)'=(-1)^k k!\frac{-(k+1)}{x^{k+2}}$$

$$=\frac{(-1)^{k+1}(k+1)!}{x^{k+2}}$$

より $n=k+1$ のときの式が従う．よって，$\dfrac{d^n}{dx^n}\dfrac{1}{x}=\dfrac{(-1)^n n!}{x^{n+1}}$ である．

（2） $f(x)=\sin x$ とおく．$n=0$ のとき，$f^{(0)}(x)=(-1)^0\sin x=\sin x$ より式は成立する．$n=2k$ において $f^{(2k)}(x)=(-1)^k\sin x$ が成り立つと仮定すると，

$$f^{(2k+1)}(x)=(f^{(2k)}(x))'=\big((-1)^k\sin x\big)'=(-1)^k\cos x$$

より $n=2k+1$ のときの主張の式が成り立つ．また，$n=2k-1$ において $f^{(2k-1)}(x)=(-1)^{k-1}\cos x$ が成り立つと仮定すると，

$$f^{(2k)}(x)=(f^{(2k-1)}(x))'=\big((-1)^{k-1}\cos x\big)'=(-1)^k\sin x$$

より $n=2k$ のときの主張の式が成り立つ．よって，

$$\frac{d^n}{dx^n}\sin x=\begin{cases}(-1)^{k-1}\cos x & n=2k-1\\ (-1)^k\sin x & n=2k\end{cases}$$

が成り立つ．

（3） $f(x)=\cos x$ とおく．$n=0$ のとき，$f^{(0)}(x)=(-1)^0\cos x=\cos x$ より式は成立する．$n=2k$ において $f^{(2k)}(x)=(-1)^k\cos x$ が成り立つと仮定すると，

$$f^{(2k+1)}(x)=(f^{(2k)}(x))'=\big((-1)^k\cos x\big)'=(-1)^{k+1}\sin x$$

より $n=2k+1$ のときの主張の式が成り立つ．また，$n=2k-1$ において $f^{(2k-1)}(x)=(-1)^k\sin x$ が成り立つと仮定すると，

$$f^{(2k)}(x)=(f^{(2k-1)}(x))'=\big((-1)^k\sin x\big)'=(-1)^k\cos x$$

より $n=2k$ のときの主張の式が成り立つ．よって，

$$\frac{d^n}{dx^n}\cos x=\begin{cases}(-1)^k\sin x & n=2k-1\\ (-1)^k\cos x & n=2k\end{cases}$$

が成り立つ．

5. （１） $(e^{-x}\sin x)''={}_2C_0(e^{-x})''\sin x+{}_2C_1(e^{-x})'(\sin x)'+{}_2C_2e^{-x}(\sin x)''$
$=e^{-x}\sin x-2e^{-x}\cos x-e^{-x}\sin x=-2e^{-x}\cos x$

（２） $\left(\frac{1}{x}\log x\right)''={}_2C_0\left(\frac{1}{x}\right)''\log x+{}_2C_1\left(\frac{1}{x}\right)'(\log x)'+{}_2C_2\frac{1}{x}(\log x)''$
$=\frac{2}{x^3}\log x+2\left(-\frac{1}{x^2}\right)\frac{1}{x}+\frac{1}{x}\left(-\frac{1}{x^2}\right)=\frac{2}{x^3}\log x-\frac{3}{x^3}$

6. $1\leq k\leq \ell$ のとき，${}_\ell C_{k-1}+{}_\ell C_k=\frac{\ell!}{(k-1)!\,(\ell-k+1)!}+\frac{\ell!}{k!\,(\ell-k)!}=\frac{\ell!\,k}{k!\,(\ell-k+1)!}+\frac{\ell!(\ell-k+1)}{k!\,(\ell-k+1)!}=\frac{(\ell+1)!}{k!\,(\ell+1-k)!}={}_{\ell+1}C_k$ が成り立つ．

余談：まず，$\{{}_1C_0,{}_1C_1\}$ を考える．一般に ${}_nC_0={}_nC_n=1$ が成り立つので，${}_1C_0={}_1C_1=1$ であることはすぐに分かる．次に，$\{{}_2C_0,{}_2C_1,{}_2C_2\}$ を考える．同様に ${}_2C_0={}_2C_2=1$ はすぐに分かる．${}_2C_1$ は問題 3.4.6 の等式 ${}_\ell C_{k-1}+{}_\ell C_k={}_{\ell+1}C_k$ を使うと，${}_2C_1={}_1C_0+{}_1C_1=1+1=2$ のように得ることができる．さらに，$\{{}_3C_0,{}_3C_1,{}_3C_2,{}_3C_3\}$ を考える．先程と同様に ${}_3C_0={}_3C_3=1$ はすぐに分かる．残りの 2 つについては，問題 3.4.6 の等式 ${}_\ell C_{k-1}+{}_\ell C_k={}_{\ell+1}C_k$ を使うと，${}_3C_1={}_2C_0+{}_2C_1=1+2=3$, ${}_3C_2={}_2C_1+{}_2C_2=2+1=3$ のように得ることができる．これらの計算結果を並べると，

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & 1 & & & \\
 & & & \swarrow\ \searrow & & & \\
 & & 1 & & 1 & & \\
 & & \swarrow\ \searrow & & \swarrow\ \searrow & & \\
 & 1 & & 2 & & 1 & \\
 & \swarrow\ \searrow & & \swarrow\ \searrow & & \swarrow\ \searrow & \\
1 & & 3 & & 3 & & 1
\end{array}$$

のようになる．図を見ると，矢印の沿って上段の数字の和を計算することで，次の段の ${}_nC_k$ たちの値が求まることが分かる．これが問題 3.4.6 の等式の意味である．もう一段増やすと

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & 1 & & & & \\
 & & & & \swarrow\ \searrow & & & & \\
 & & & 1 & & 1 & & & \\
 & & & \swarrow\ \searrow & & \swarrow\ \searrow & & & \\
 & & 1 & & 2 & & 1 & & \\
 & & \swarrow\ \searrow & & \swarrow\ \searrow & & \swarrow\ \searrow & & \\
 & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & \\
 & \swarrow\ \searrow & & \swarrow\ \searrow & & \swarrow\ \searrow & & \swarrow\ \searrow & \\
1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1
\end{array}$$

となる．つまり，${}_4C_0=1$, ${}_4C_1=4$, ${}_4C_2=6$, ${}_4C_3=4$, ${}_4C_4=1$ である．これを利用すると，例えば展開式 $(x+1)^4=x^4+4x^3+6x^2+4x+1$ を簡単に書き下すことができる．

7. $n=1$ のとき，積の微分の公式（定理 3.1.7 (3)）そのものであり，主張は従う．$n=\ell$ のときに主張が成り立つと仮定する．このとき，

$$\frac{d^{\ell+1}}{dx^{\ell+1}}(f(x)g(x))=\frac{d}{dx}\left(\sum_{k=0}^{\ell}{}_\ell C_kf^{(\ell-k)}(x)g^{(k)}(x)\right)=\sum_{k=0}^{\ell}{}_\ell C_k\frac{d}{dx}\left(f^{(\ell-k)}(x)g^{(k)}(x)\right)$$

$$=\sum_{k=0}^{\ell}{}_\ell C_k\left(f^{(\ell-k+1)}(x)g^{(k)}(x)+f^{(\ell-k)}(x)g^{(k+1)}(x)\right)$$

$$= \sum_{k=0}^{\ell} {}_{\ell}C_k f^{(\ell-k+1)}(x)g^{(k)}(x) + \sum_{k=0}^{\ell} {}_{\ell}C_k f^{(\ell-k)}(x)g^{(k+1)}(x)$$

$$= \sum_{k=0}^{\ell} {}_{\ell}C_k f^{(\ell-k+1)}(x)g^{(k)}(x) + \sum_{k=1}^{\ell+1} {}_{\ell}C_{k-1} f^{(\ell-k+1)}(x)g^{(k)}(x)$$

$$= {}_{\ell}C_0 f^{(\ell+1)}(x)g^{(0)}(x) + \sum_{k=1}^{\ell} ({}_{\ell}C_k + {}_{\ell}C_{k-1}) f^{(\ell-k+1)}(x)g^{(k)}(x)$$

$$+ {}_{\ell}C_{\ell} f^{(0)}(x)g^{(\ell+1)}(x) = \sum_{k=0}^{\ell+1} {}_{\ell+1}C_k f^{(\ell+1-k)}(x)g^{(k)}(x)$$

より，$n = \ell + 1$ のときの式が成り立つ．（最後の等号では ${}_{\ell}C_0 = {}_{\ell+1}C_0$，${}_{\ell}C_{\ell} = {}_{\ell+1}C_{\ell+1}$ および問題 3.4.6 の等式を使っている．）よって，数学的帰納法により主張が従う．

8. $x > 0$ のとき，$k = 0, 1, 2, \ldots, n+1$ について，

$$f^{(k)}(x) = (n+1)n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+2)x^{n+1-k}$$

が成り立つ．特に，$k \leq n$ のとき $\lim_{x \to 0+0} f^{(k)}(x) = \lim_{x \to 0-0} f^{(k)}(x) = 0$ が成り立つので，$f(x)$ は C^n 級関数である．一方，$k = n+1$ のときは，$f^{(n+1)}(x) = (n+1)!$ より $\lim_{x \to 0+0} f^{(n+1)}(x) = (n+1)!$ となるが，これは $\lim_{x \to 0-0} f^{(n+1)}(x) = 0$ とは一致しない．よって，$f(x)$ は C^{n+1} 級関数ではない．

問題 3.5

1. （１） $f(x) = \log(1+x)$ とおくと，$f'(x) = \dfrac{1}{1+x}$, $f''(x) = \dfrac{-1}{(1+x)^2}$，$f^{(3)}(x) = \dfrac{2}{(1+x)^3}$ である．よって，

$$\sum_{k=0}^{3} \frac{1}{k!} f^{(k)}(0)x^k = \frac{1}{0!}\log 1 + \frac{1}{1!}\frac{1}{1}x + \frac{1}{2!}\frac{-1}{1^2}x^2 + \frac{1}{3!}\frac{2}{1^3}x^3 = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3$$

（２） $f(x) = e^{2x}$ とおくと，$f'(x) = 2e^{2x}$, $f''(x) = 4e^{2x}$, $f^{(3)}(x) = 8e^{2x}$ である．よって，

$$\sum_{k=0}^{3} \frac{1}{k!} f^{(k)}(0)x^k = \frac{1}{0!}e^0 + \frac{1}{1!}2e^0 x + \frac{1}{2!}4e^0 x^2 + \frac{1}{3!}8e^0 x^3 = 1 + 2x + 2x^2 + \frac{4}{3}x^3$$

（３） $f(x) = \sin(x^2)$ とおくと，$f'(x) = 2x\cos(x^2)$, $f''(x) = 2\cos(x^2) - 4x^2\sin(x^2)$, $f^{(3)}(x) = -4x\sin(x^2) - 8x\sin(x^2) - 8x^3\cos(x^2) = -12x\sin(x^2) - 8x^3\cos(x^2)$ である．よって，

$$\sum_{k=0}^{3} \frac{1}{k!} f^{(k)}(0)x^k = \frac{1}{0!}\sin 0 + \frac{1}{1!}\,0\,x + \frac{1}{2!}(2\cos 0 - 0)x^2 + \frac{1}{3!}\,0\,x^3 = 0 + 0 + x^2 + 0 = x^2$$

（４） $f(x) = \dfrac{1}{1-x}$ とおくと，$f'(x) = \dfrac{1}{(1-x)^2}$, $f''(x) = \dfrac{2}{(1-x)^3}$, $f^{(3)}(x) = \dfrac{6}{(1-x)^4}$ である．よって，

$$\sum_{k=0}^{3} \frac{1}{k!} f^{(k)}(0)x^k = \frac{1}{0!}\frac{1}{1} + \frac{1}{1!}\frac{1}{1}x + \frac{1}{2!}\frac{2}{1}x^2 + \frac{1}{3!}\frac{6}{1}x^3 = 1 + x + x^2 + x^3$$

2. （１） $f(x) = x^3$ とおくと，$f'(x) = 3x^2$, $f''(x) = 6x$, $f^{(3)}(x) = 6$ である．よって，

$$\sum_{k=0}^{3} \frac{1}{k!} f^{(k)}(1)(x-1)^k = \frac{1}{0!}1 + \frac{1}{1!}3(x-1) + \frac{1}{2!}6(x-1)^2 + \frac{1}{3!}6(x-1)^3$$

$$= 1 + 3(x-1) + 3(x-1)^2 + (x-1)^3$$

（２） $f(x)=x^5$ とおくと，$f'(x)=5x^4$, $f''(x)=20x^3$, $f^{(3)}(x)=60x^2$ である．よって，

$$\sum_{k=0}^{3}\frac{1}{k!}f^{(k)}(1)(x-1)^k=\frac{1}{0!}1+\frac{1}{1!}5(x-1)+\frac{1}{2!}20(x-1)^2+\frac{1}{3!}60(x-1)^3$$

$$=1+5(x-1)+10(x-1)^2+10(x-1)^3$$

（３） $f(x)=\log x$ とおくと，$f'(x)=\dfrac{1}{x}$, $f''(x)=-\dfrac{1}{x^2}$, $f^{(3)}(x)=\dfrac{2}{x^3}$ である．よって，

$$\sum_{k=0}^{3}\frac{1}{k!}f^{(k)}(1)(x-1)^k=\frac{1}{0!}\log 1+\frac{1}{1!}\frac{1}{1}(x-1)+\frac{1}{2!}\left(-\frac{1}{1}\right)(x-1)^2+\frac{1}{3!}\frac{2}{1}(x-1)^3$$

$$=(x-1)-\frac{1}{2}(x-1)^2+\frac{1}{3}(x-1)^3$$

（４） $f(x)=\dfrac{1}{x}$ とおくと，$f'(x)=-\dfrac{1}{x^2}$, $f''(x)=\dfrac{2}{x^3}$, $f^{(3)}(x)=-\dfrac{6}{x^4}$ である．よって，

$$\sum_{k=0}^{3}\frac{1}{k!}f^{(k)}(1)(x-1)^k=\frac{1}{0!}1-\frac{1}{1!}\frac{1}{1}(x-1)+\frac{1}{2!}\frac{2}{1}(x-1)^2-\frac{1}{3!}\frac{6}{1}(x-1)^3$$

$$=1-(x-1)+(x-1)^2-(x-1)^3$$

3. $g(t)$ の式に $t=a$ を代入すると，右辺はテーラーの定理の式の右辺そのものであることが確認できる．よって，$R_n=\dfrac{f^{(n)}(\xi)}{n!}(x-a)^n$ を満たす $\xi\in(a,x)$ が存在することを示せばよい．$g(x)=f(x)=g(a)$ が成り立つので，$[a,x]$ 上の関数 $g(t)$ にロルの定理（定理 3.2.5）を用いると，$g'(\xi)=0$ を満たす $\xi\in(a,x)$ が存在する．変数 t で微分すると，

$$g'(t)=f'(t)+\sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{f^{(k+1)}(t)}{k!}(x-t)^k-\frac{f^{(k)}(t)}{(k-1)!}(x-t)^{k-1}\right)-R_n\,\frac{n(x-t)^{n-1}}{(x-a)^n}$$

$$=f'(t)+\frac{f^{(n)}(t)}{(n-1)!}(x-t)^{n-1}-f'(t)-R_n\,\frac{n(x-t)^{n-1}}{(x-a)^n}$$

$$=\frac{f^{(n)}(t)}{(n-1)!}(x-t)^{n-1}-R_n\,\frac{n(x-t)^{n-1}}{(x-a)^n}$$

より，$\dfrac{f^{(n)}(\xi)}{(n-1)!}(x-\xi)^{n-1}=R_n\,\dfrac{n(x-\xi)^{n-1}}{(x-a)^n}$ となる．よって，$R_n=\dfrac{f^{(n)}(\xi)}{n!}(x-a)^n$ が成り立つ．

4. $\hat{g}(t)$ の式に $t=a$ を代入すると，右辺はテーラーの定理の式の右辺そのものであることが確認できる．よって，$R_n=\dfrac{f^{(n)}(\hat{\xi})}{n!}(x-\hat{x})^{n-1}(x-a)$ を満たす $\hat{\xi}\in(a,x)$ が存在することを示せばよい．$\hat{g}(x)=f(x)=\hat{g}(a)$ が成り立つので，$[a,x]$ 上の関数 $\hat{g}(t)$ にロルの定理（定理 3.2.5）を用いると，$\hat{g}'(\hat{\xi})=0$ を満たす $\hat{\xi}\in(a,x)$ が存在する．変数 t で微分すると，

$$\hat{g}'(t)=f'(t)+\sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{f^{(k+1)}(t)}{k!}(x-t)^k-\frac{f^{(k)}(t)}{(k-1)!}(x-t)^{k-1}\right)-\frac{R_n}{x-a}$$

$$=f'(t)+\frac{f^{(n)}(t)}{(n-1)!}(x-t)^{n-1}-f'(t)-\frac{R_n}{x-a}$$

$$=\frac{f^{(n)}(t)}{(n-1)!}(x-t)^{n-1}-\frac{R_n}{x-a}$$

より，$\dfrac{f^{(n)}(\hat{\xi})}{(n-1)!}(x-\hat{\xi})^{n-1}=\dfrac{R_n}{x-a}$ となる．よって，$R_n=\dfrac{f^{(n)}(\hat{\xi})}{(n-1)!}(x-\hat{\xi})^{n-1}(x-a)$ が成り立つ．

5. （１） 問題 3.4.4（２）より，$n = 2\ell - 1$ のとき，$\dfrac{d^n}{dx^n}\sin x = (-1)^{\ell-1}\cos x$ が成り立つ．よって，$R_n = \dfrac{(-1)^{\ell-1}\cos\xi}{n!}(x-a)^n$ は，$\ell = 2k-1$ のときは正，$\ell = 2k$ のときは負である．

（２） テーラーの定理より，$\sin x = x - \dfrac{1}{6}x^3 + R_5$ と書ける．（１）より $R_5 > 0$ であり，

$$\sin x = x - \frac{1}{6}x^3 + R_5 > x - \frac{1}{6}x^3$$

が成り立つ．次に，$n = 3$ のときのテーラーの定理を使うと，$\sin x = x + R_3$ と書ける．（１）より $R_3 < 0$ であり，$\sin x = x + R_3 < x$ が成り立つ．

（３） $n = 9$ のときのテーラーの定理を使うと，$x - \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^5}{5!} - \dfrac{x^7}{7!} + R_9$ と書ける．（１）より $R_9 > 0$ であり，

$$\sin x > x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!}$$

が成り立つ．次に，$n = 7$ のときのテーラーの定理を使うと，$x - \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^5}{5!} + R_7$ と書ける．（１）より $R_7 < 0$ であり，$\sin x < x - \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^5}{5!}$ が成り立つ．

問題 4.1

1. （１） $\dfrac{1}{3}x^3 + \dfrac{1}{2}x^2 + C$

（２） $\displaystyle\int x^2(x+3)\,dx = \int (x^3 + 3x^2)dx = \frac{1}{4}x^4 + x^3 + C$

（３） $\log|x| + C$

（４） $-\cos x + C$

（５） $\sin x + C$

（６） $-e^{-x} + C$

（７） $-\dfrac{1}{x} + C$

（８） $\displaystyle\int \frac{x^2+2}{x^3}dx = \int \left(\frac{1}{x} + \frac{2}{x^3}\right)dx = \log|x| - \frac{1}{x^2} + C$

（９） $\displaystyle\int \frac{x^3-2}{\sqrt{x}}dx = \int \left(x^{\frac{5}{2}} - 2x^{-\frac{1}{2}}\right)dx = \frac{2}{7}x^{\frac{7}{2}} - 4x^{\frac{1}{2}} + C$

2. （１）〜（６）は置換積分法（定理 4.1.8）を用いて計算する．（１），（２）くらいだと，積分の式から原始関数を直接見つけて，答えだけ書くことの方が多い．（７）〜（９）は部分積分法（定理 4.1.12）を用いて計算する．

（１） $t = x+1$ とおくと，$dt = dx$ より，$\displaystyle\int (x+1)^9\,dx = \int t^9\,dt = \frac{1}{10}t^{10} + C = \frac{1}{10}(x+1)^{10} + C$

（２） $t = 2x+1$ とおくと，$dt = 2dx$ より，$\displaystyle\int (2x+1)^9\,dx = \int t^9\,\frac{dt}{2} = \frac{1}{2}\,\frac{1}{10}t^{10} + C = \frac{1}{20}(2x+1)^{10}$

（３） $t = x^2+1$ とおくと，$dt = 2xdx$ より，$\displaystyle\int \frac{2x}{x^2+1}\,dx = \int \frac{1}{t}dt = \log|t| + C = \log(x^2+1) + C$

（４） $t = -x^2$ とおくと，$dt = -2xdx$ より，$\displaystyle\int xe^{-x^2}\,dx = \int e^t\left(-\frac{1}{2}\right)dt = -\frac{1}{2}e^t + C = -\frac{1}{2}e^{-x^2} + C$

（５） $t = 2x$ とおくと，$dt = 2dx$ より，$\displaystyle\int \sin^2 x\,dx = \int \frac{1-\cos 2x}{2}\,dx = \int \frac{1-\cos t}{2}\,\frac{dt}{2} = \frac{1}{4}(t - \sin t) + C = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\sin 2x + C$

（６） $t = \sin x$ とおくと，$dt = \cos x\,dx$ より，$\displaystyle\int \cos^3 x\,dx = \int (1 - \sin^2 x)\cos x\,dx = \int (1-t^2)dt =$

$t - \frac{1}{3}t^3 + C = \sin x - \frac{1}{3}\sin^3 x + C$

（7） $\int x \sin x\, dx = x(-\cos x) - \int (-\cos x) dx = -x\cos x + \sin x + C$

（8） $\int x^2 e^{-x}\, dx = x^2(-e^{-x}) - \int 2x(-e^{-x})dx = x^2(-e^{-x}) - \left(2xe^{-x} - \int 2e^{-x}\, dx\right)$

$= -x^2e^{-x} - 2xe^{-x} - 2e^{-x} + C = -(x^2+2x+2)e^{-x} + C$

（9） $\int x^2 \log|x|\, dx = \frac{1}{3}x^3\log|x| - \int \frac{1}{3}x^3(\log|x|)'\, dx = \frac{1}{3}x^3\log|x| - \int \frac{1}{3}x^2\, dx$

$= \frac{1}{3}x^3\log|x| - \frac{1}{9}x^3 + C$

3. （1） $\int_1^2 x^4\, dx = \left[\frac{1}{5}x^5\right]_1^2 = \frac{1}{5}(2^5 - 1^5) = \frac{31}{5}$

（2） $\int_0^{\pi/2} \sin x\, dx = \Big[-\cos x\Big]_0^{\pi/2} = -\cos\frac{\pi}{2} + \cos 0 = 1$

（3） $\int_0^{\pi/4} \frac{1}{\cos^2 x}\, dx = \Big[\tan x\Big]_0^{\pi/4} = \tan\frac{\pi}{4} - \tan 0 = 1$

（4） $\int_0^1 xe^x\, dx = \Big[xe^x\Big]_0^1 - \int_0^1 e^x\, dx = e - 0 - \Big[e^x\Big]_0^1 = e - (e-1) = 1$

（5） $\int_0^{\pi/2} x\sin x\, dx = \Big[x(-\cos x)\Big]_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2}(-\cos x)dx = 0 - 0 + \Big[\sin x\Big]_0^{\pi/2}$

$= \sin\frac{\pi}{2} - \sin 0 = 1$

（6） $\int_1^e \log x\, dx = \int_1^e 1\cdot\log x\, dx = \Big[x\log x\Big]_1^e - \int_1^e x\,\frac{1}{x}\, dx = e - 0 - \int_1^e dx = e - \Big[x\Big]_1^e =$ $e - (e-1) = 1$

（7） $t = 2x-1$ とおくと，$dt = 2dx$ であり，変数 x における積分範囲 $[1,2]$ は，変数 t においては $[1,3]$ となる．よって，$\int_1^2 (2x-1)^3\, dx = \int_1^3 t^3\, \frac{dt}{2} = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{4}t^4\right]_1^3 = \frac{1}{8}(3^4 - 1^4) = \frac{81-1}{8} = 10$

（8） $t = x^4 + 1$ とおくと，$dt = 4x^3dx$ であり，変数 x における積分範囲 $[0,1]$ は，変数 t においては $[1,2]$ となる．よって，$\int_0^1 \frac{x^3}{x^4+1}\, dx = \int_1^2 \frac{1}{t}\,\frac{dt}{4} = \left[\frac{1}{4}\log t\right]_1^2 = \frac{1}{4}(\log 2 - \log 1) = \frac{1}{4}\log 2$

（9） $t = 2x$ とおくと，$dt = 2dx$ であり，変数 x における積分範囲 $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ は，変数 t においては $[0,\pi]$ となる．よって，$\int_0^{\pi/2} \cos^2 x\, dx = \int_0^{\pi/2} \frac{1+\cos 2x}{2}\, dx = \int_0^{\pi} \frac{1+\cos t}{2}\,\frac{dt}{2} = \frac{1}{4}\Big[t + \sin t\Big]_0^{\pi} =$ $\frac{1}{4}((\pi + \sin\pi) - (0 + \sin 0)) = \frac{\pi}{4}$

4. 部分積分を 2 回行うと，

$$I = \int e^x\cos x\, dx = e^x\sin x - \int e^x \sin x\, dx = e^x \sin x - \left(e^x(-\cos x) - \int e^x(-\cos x)\, dx\right)$$

$$= e^x\sin x + e^x\cos x - \int e^x\cos x\, dx = e^x\sin x + e^x\cos x - I$$

となる．よって，$I = \frac{1}{2}(e^x\sin x + e^x\cos x) + C$

5. 不等式 $(tf(x) + g(x))^2 = (f(x))^2t^2 + 2f(x)g(x)t + (g(x))^2 \geq 0$ を x について積分すると，定理 4.1.7 より，不等式

$$t^2\int_a^b (f(x))^2\, dx + 2t\int_a^b f(x)g(x)\, dx + \int_a^b (g(x))^2\, dx \geq 0$$

が得られる．これを変数 t についての 2 次式と思うと，判別式が 0 以下になることから，主張にある積分型のシュワルツの不等式が従う．

問題 4.2

1. （1） $\displaystyle\int \frac{2x+1}{x^2+1}\,dx = \int \frac{2x}{x^2+1}\,dx + \int \frac{1}{x^2+1}\,dx = \log(x^2+1) + \arctan x + C$

（2） $\displaystyle\frac{(x+1)^3}{x^2+1} = \frac{x^3+3x^2+3x+1}{x^2+1} = \frac{(x^3+x)+3(x^2+1)+2x-2}{x^2+1} = x+3+\frac{2x}{x^2+1}-\frac{2}{x^2+1}$

より，$\displaystyle\int \frac{(x+1)^3}{x^2+1}\,dx = \int \left(x+3+\frac{2x}{x^2+1}-\frac{2}{x^2+1}\right)dx = \frac{1}{2}x^2+3x+\log(x^2+1)-2\arctan x + C$

（3） $\displaystyle\frac{2}{(x-1)(x^2+1)} = \frac{A}{x-1}+\frac{Bx+C}{x^2+1}$ とおくと，

$$\frac{A}{x-1}+\frac{Bx+C}{x^2+1} = \frac{A(x^2+1)+(Bx+C)(x-1)}{(x-1)(x^2+1)} = \frac{(A+B)x^2+(C-B)x+A-C}{(x-1)(x^2+1)}$$

より，$A+B=0,\ C-B=0,\ A-C=2$ である．最初の 2 式より $B=C=-A$ なので，$A=1$, $B=C=-1$ が得られる．よって，

$$\begin{aligned}\int \frac{2}{(x-1)(x^2+1)}\,dx &= \int \left(\frac{1}{x-1}-\frac{x+1}{x^2+1}\right)dx \\ &= \log|x-1| - \frac{1}{2}\log(x^2+1) - \arctan x + C \\ &= \log\frac{|x-1|}{\sqrt{x^2+1}} - \arctan x + C\end{aligned}$$

（4） $\displaystyle\frac{x^2+5}{(x-1)(x^2+x+1)} = \frac{A}{x-1}+\frac{Bx+C}{x^2+x+1}$ とおくと，

$$\begin{aligned}\frac{A}{x-1}+\frac{Bx+C}{x^2+x+1} &= \frac{(A(x^2+x+1)+(Bx+C)(x-1)}{(x-1)(x^2+x+1)} \\ &= \frac{(A+B)x^2+(A-B+C)x+A-C}{(x-1)(x^2+x+1)}\end{aligned}$$

より，$A+B=1,\ A-B+C=0,\ A-C=5$ である．3 式の和は $3A+C=6$ となるので，$A=2$ である．これを代入すると，$B=-1,\ C=-3$ が得られる．よって，

$$\begin{aligned}\int \frac{x^2+5}{(x-1)(x^2+x+1)}\,dx &= \int \left(\frac{2}{x-1}-\frac{x+3}{x^2+x+1}\right)dt \\ &= 2\log|x-1| - \int \frac{1}{2}\left(\frac{2x+1}{x^2+x+1}+\frac{5}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}\right) \\ &= 2\log|x-1| - \frac{1}{2}\left(\log|x^2+x+1| + 5\frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\left(x+\frac{1}{2}\right)\right)\right) + C \\ &= \log\frac{|x-1|^2}{\sqrt{|x^2+x+1|}} - \frac{5\sqrt{3}}{3}\arctan\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\left(x+\frac{1}{2}\right)\right) + C\end{aligned}$$

（5） $\displaystyle\frac{x^2-7}{x^3+1} = \frac{x^2-7}{(x+1)(x^2-x+1)} = \frac{A}{x+1}+\frac{Bx+C}{x^2-x+1}$ とおくと，

$$\begin{aligned}\frac{A}{x+1}+\frac{Bx+C}{x^2-x+1} &= \frac{A(x^2-x+1)+(Bx+C)(x+1)}{(x+1)(x^2-x+1)} \\ &= \frac{(A+B)x^2+(-A+B+C)x+A+C}{(x+1)(x^2-x+1)}\end{aligned}$$

より，$A+B=1$, $-A+B+C=0$, $A+C=-7$ である．最初と最後の式を足し，2 つ目の式を引くと，$3A=-6$ より $A=-2$ である．これを代入すると，$B=3$, $C=-5$ が得られる．よって，

$$\int \frac{x^2-7}{x^3+1}\,dx = \int \left(\frac{-2}{x+1} + \frac{3x-5}{x^2-x+1}\right) dx$$

$$= -2\log|x+1| + \int \left(\frac{3}{2}\frac{2x-1}{x^2-x+1} - \frac{\frac{7}{2}}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}\right) dx$$

$$= -2\log|x+1| + \frac{3}{2}\log|x^2-x+1| - \frac{7}{2}\frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\left(x-\frac{1}{2}\right)\right) + C$$

$$= \log\frac{|x^2-x+1|^{\frac{3}{2}}}{|x+1|^2} - \frac{7\sqrt{3}}{3}\arctan\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\left(x-\frac{1}{2}\right)\right) + C$$

（6） $\dfrac{4x}{(x-1)^2(x^2+1)} = \dfrac{A}{(x-1)^2} + \dfrac{B}{x-1} + \dfrac{Cx+D}{x^2+1}$ とおくと，

$$\frac{A}{(x-1)^2} + \frac{B}{x-1} + \frac{Cx+D}{x^2+1} = \frac{A(x^2+1)+B(x-1)(x^2+1)+(Cx+D)(x-1)^2}{(x-1)^2(x^2+1)}$$

$$= \frac{(B+C)x^3+(A-B-2C+D)x^2+(B+C-2D)x+A-B+D}{(x-1)^2(x^2+1)}$$

より，$B+C=0$, $A-B-2C+D=0$, $B+C-2D=4$, $A-B+D=0$ である．最初と 3 つ目の式より $D=-2$ であり，残りの 2 式に $C=-B$ と $D=-2$ を代入すると，$A+B=2$, $A-B=2$ となり，$A=2$, $B=C=0$ が得られる．よって，

$$\int \frac{4x}{(x-1)^2(x^2+1)}\,dx = \int \left(\frac{2}{(x-1)^2} - \frac{2}{x^2+1}\right) dx = -\frac{2}{x-1} - 2\arctan x + C$$

2. （1） $t=\sqrt{x+4}$ とおくと，$t^2=x+4$ より $2tdt=dx$ が得られる．よって，

$$\int \frac{1}{x\sqrt{x+4}}\,dx = \int \frac{1}{(t^2-4)t}2t\,dt = \int \frac{2}{t^2-4}\,dt = \int \frac{1}{2}\left(\frac{1}{t-2} - \frac{1}{t+2}\right) dt$$

$$= \frac{1}{2}(\log|t-2| - \log|t+2|) + C = \frac{1}{2}\log\left|\frac{t-2}{t+2}\right| + C = \frac{1}{2}\log\left|\frac{\sqrt{x+4}-2}{\sqrt{x+4}+2}\right| + C$$

（2） $t=\sqrt{x-4}$ とおくと，$t^2=x-4$ より $2tdt=dx$ が得られる．よって，

$$\int \frac{1}{x\sqrt{x-4}}\,dx = \int \frac{1}{(t^2+4)t}2t\,dt = \int \frac{2}{t^2+4}\,dt = 2\,\frac{1}{2}\arctan\frac{t}{2} + C = \arctan\frac{\sqrt{x-4}}{2} + C$$

（3） $t=(x+1)^{\frac{1}{3}}$ とおくと，$t^3=x+1$ より $3t^2dt=dx$ が得られる．よって，

$$\int \frac{1}{x(x+1)^{\frac{1}{3}}}\,dx = \int \frac{1}{(t^3-1)t}3t^2\,dt = \int \frac{3t}{t^3-1}\,dt$$

ここで，$\dfrac{3t}{t^3-1} = \dfrac{3t}{(t-1)(t^2+t+1)} = \dfrac{A}{t-1} + \dfrac{Bt+C}{t^2+t+1}$ とおくと，

$$\frac{A}{t-1} + \frac{Bt+C}{t^2+t+1} = \frac{A(t^2+t+1)+(Bt+C)(t-1)}{(t-1)(t^2+t+1)} = \frac{(A+B)t^2+(A-B+C)t+A-C}{(t-1)(t^2+t+1)}$$

より，$A+B=0$, $A-B+C=3$, $A-C=0$ となるので，$A=1$, $B=-1$, $C=1$ である．よって，

$$\int \frac{1}{x(x+1)^{\frac{1}{3}}}\,dx = \int \frac{3t}{t^3-1}\,dt = \int \left(\frac{1}{t-1} - \frac{t-1}{t^2+t+1}\right) dt$$

$$= \log|t-1| - \int \left(\frac{1}{2}\frac{2t+1}{t^2+t+1} - \frac{\frac{3}{2}}{\left(t+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}} \right) dt$$

$$= \log|t-1| - \frac{1}{2}\log|t^2+t+1| + \frac{3}{2}\frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\left(t+\frac{1}{2}\right)\right) + C$$

$$= \log\frac{|(x+1)^{\frac{1}{3}}-1|}{\sqrt{|(x+1)^{\frac{2}{3}}+(x+1)^{\frac{1}{3}}+1|}} + \sqrt{3}\arctan\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\left((x+1)^{\frac{1}{3}}+\frac{1}{2}\right)\right) + C$$

（４）　$\sqrt{x^2+1} = t-x$ とおくと，$x^2+1 = t^2-2tx+x^2$ より，$x = \dfrac{t^2-1}{2t}$，$\sqrt{x^2+1} = t - \dfrac{t^2-1}{2t} = \dfrac{t^2+1}{2t}$，$dx = \dfrac{4t^2-2(t^2-1)}{4t^2}\,dt = \dfrac{t^2+1}{2t^2}dt$ が得られる．よって，

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{x^2+1}}\,dx = \int \left(\frac{t^2-1}{2t}\right)^2 \frac{2t}{t^2+1}\frac{t^2+1}{2t^2}\,dt = \int \frac{t^4-2t^2+1}{4t^3}\,dt$$

$$= \int \left(\frac{t}{4} - \frac{1}{2t} + \frac{1}{4t^3}\right) dt = \frac{1}{8}t^2 - \frac{1}{2}\log|t| - \frac{1}{8t^2} + C$$

$$= \frac{1}{8}\left(t^2 - \frac{1}{t^2}\right) - \frac{1}{2}\log|t| + C$$

$$= \frac{1}{8}\left((x+\sqrt{x^2+1})^2 - \frac{1}{(x+\sqrt{x^2+1})^2}\right) - \frac{1}{2}\log\left|x+\sqrt{x^2+1}\right| + C$$

$$= \frac{1}{8}\left((x+\sqrt{x^2+1})^2 - (\sqrt{x^2+1}-x)^2\right) - \frac{1}{2}\log\left|x+\sqrt{x^2+1}\right| + C$$

$$= \frac{1}{8}\,4x\sqrt{x^2+1} - \frac{1}{2}\log\left|x+\sqrt{x^2+1}\right| + C$$

$$= \frac{1}{2}\left(x\sqrt{x^2+1} - \log\left|x+\sqrt{x^2+1}\right|\right) + C$$

（５）　$\sqrt{x^2-2x-3} = t-x$ とおくと，$x^2-2x-3 = t^2-2tx+x^2$ より，$x = \dfrac{t^2+3}{2t-2}$，$\sqrt{x^2-2x-3} = t - \dfrac{t^2+3}{2t-2} = \dfrac{t^2-2t-3}{2t-2}$，$dx = \dfrac{2t(2t-2)-2(t^2+3)}{(2t-2)^2}\,dt = \dfrac{t^2-2t-3}{2(t-1)^2}\,dt$ が得られる．よって，

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2-2x-3}}\,dx = \int \frac{2t-2}{t^2-2t-3}\frac{t^2-2t-3}{2(t-1)^2}\,dt = \int \frac{1}{t-1}\,dt$$

$$= \log|t-1| + C = \log\left|x-1+\sqrt{x^2-2x-3}\right| + C$$

（６）　$-x^2+2x+3 = -(x+1)(x-3) \geq 0$ であるから，$-1 \leq x \leq 3$ である．$t = \sqrt{\dfrac{x+1}{3-x}}$ とおくと，$(3-x)t^2 = x+1$ より，$x = \dfrac{3t^2-1}{t^2+1}$，$dx = \dfrac{6t(t^2+1)-(3t^2-1)\,2t}{(t^2+1)^2}\,dt = \dfrac{8t}{(t^2+1)^2}\,dt$ が得られる．よって，

$$\int \frac{1}{\sqrt{-x^2+2x+3}}\,dx = \int \frac{1}{\sqrt{-(x+1)(x-3)}}\,dt = \int \frac{1}{(3-x)\sqrt{\frac{x+1}{3-x}}}\,dx$$

$$= \int \frac{1}{\left(3-\frac{3t^2-1}{t^2+1}\right)t}\,\frac{8t}{(t^2+1)^2}\,dt = \int \frac{1}{3(t^2+1)-(3t^2-1)}\,\frac{8}{t^2+1}\,dt$$

$$= \int \frac{2}{t^2+1}\,dt = 2\arctan t + C = 2\arctan\sqrt{\frac{x+1}{3-x}} + C$$

3. （1） $u=\tan\dfrac{x}{2}$ とおくと，定理 4.2.6 より，$\sin x=\dfrac{2u}{1+u^2}$, $dx=\dfrac{2}{1+u^2}\,du$ が成り立つ．よって，

$$\int\frac{1}{1+2\sin x}\,dx=\int\frac{1}{1+\frac{4u}{1+u^2}}(1+u^2)\,du=\int\frac{1}{1+u^2+4u}\,du=\int\frac{1}{(u+2)^2-3}\,du$$

$$=-\frac{1}{2\sqrt{3}}\log\left|\frac{(u+2)+\sqrt{3}}{(u+2)-\sqrt{3}}\right|+C=\frac{\sqrt{3}}{6}\log\left|\frac{\tan\frac{x}{2}+2-\sqrt{3}}{\tan\frac{x}{2}+2+\sqrt{3}}\right|+C$$

（2） $u=\tan\dfrac{x}{2}$ とおくと，定理 4.2.6 より，$\cos x=\dfrac{1-u^2}{1+u^2}$, $dx=\dfrac{2}{1+u^2}\,du$ が成り立つ．よって，

$$\int\frac{1}{2+\cos x}\,dx=\int\frac{1}{2+\frac{1-u^2}{1+u^2}}(1+u^2)\,du=\int\frac{1}{2+2u^2+1-u^2}\,du$$

$$=\int\frac{1}{u^2+3}\,du=\arctan\frac{u}{\sqrt{3}}+C=\arctan\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\tan\frac{x}{2}\right)+C$$

4. （1） 定理 4.2.8 より，

$$\int_0^{\pi}(\sin^5 x+\cos^5 x)\,dx=\int_0^{\pi/2}(\sin^5 x+\cos^5 x)\,dx+\int_{\pi/2}^{\pi}(\sin^5 x+\cos^5 x)\,dx$$

$$=\int_0^{\pi/2}(\sin^5 x+\cos^5 x)\,dx+\int_0^{\pi/2}(\sin^5 x+(-\cos x)^5)\,dx$$

$$=\int_0^{\pi/2}2\sin^5 x\,dx=2\,\frac{(5-1)!!}{5!!}=2\,\frac{4\cdot 2}{5\cdot 3\cdot 1}\pi=\frac{16}{15}$$

（2） 定理 4.2.8 と定理 4.2.9 より，

$$\int_0^{\pi/2}(1-\sin^3 x)\cos^3 x\,dx=\int_0^{\pi/2}\left(\cos^3 x-\sin^3 x\cos^3 x\right)\,dx$$

$$=\frac{(3-1)!!}{3!!}-\frac{(3-1)!!\,(3-1)!!}{(3+3)!!}=\frac{2}{3\cdot 1}-\frac{2\cdot 2}{6\cdot 4\cdot 2}=\frac{2}{3}-\frac{1}{12}=\frac{7}{12}$$

5. 任意の整数 k について $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}\sin kx\,dx=0$ が成り立ち，整数 k が 0 以外のとき，$\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}\cos kx\,dx=0$ が成り立つ．このことを用いて示す．

（1） $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}\sin mx\cos nx\,dx=\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{2}\left(\sin(m+n)x+\sin(m-n)x\right)\,dx=\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\sin(m+n)x\,dx+\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\sin(m-n)x\,dx=0+0=0$

（2） $m=n$ のとき，

$$\int_{-\pi}^{\pi}\sin mx\,\sin mx\,dx=\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{2}\left(\cos(m-m)x-\cos(m+m)x\right)\,dx$$

$$=\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{2}(1-\cos 2mx)\,dx=\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}dx-\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\cos 2mx\,dx$$

$$=\frac{1}{2}\Big[x\Big]_{-\pi}^{\pi}+0=\frac{1}{2}(\pi-(-\pi))=\pi$$

$$\int_{-\pi}^{\pi}\cos mx\,\cos mx\,dx=\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{2}\left(\cos(m+m)x+\cos(m-m)x\right)\,dx$$

$$=\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{2}(\cos 2mx+1)\,dx=\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\cos 2mx\,dx+\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}dx$$

$$= 0 + \frac{1}{2}\Big[x\Big]_{-\pi}^{\pi} = \frac{1}{2}(\pi - (-\pi)) = \pi$$

$m \neq n$ のとき，

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx\, \sin nx\, dx = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2}\left(\cos(m-n)x - \cos(m+n)x\right)\, dx$$

$$= \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \cos(m-n)x\, dx - \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \cos(m+n)x\, dx = 0 - 0 = 0$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos mx\, \cos nx\, dx = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2}\left(\cos(m+n)x + \cos(m-n)x\right)\, dx$$

$$= \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \cos(m+n)x\, dx + \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \cos(m-n)x\, dx = 0 + 0 = 0$$

6. 定理 4.2.8 より，最初の等式

$$\frac{\pi}{2}\frac{S_{2n+1}}{S_{2n}} = \frac{\pi}{2}\frac{\frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}}{\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\frac{\pi}{2}} = \frac{(2n)!!\,(2n)!!}{(2n+1)!!(2n-1)!!}$$

が成り立つ．この式は

$$\frac{2}{\pi}\frac{S_{2n}}{S_{2n+1}} = \frac{2-1}{2}\,\frac{2+1}{2}\,\frac{4-1}{4}\,\frac{4+1}{4}\cdots\frac{2n-1}{2n}\,\frac{2n+1}{2n}$$

$$= \left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{4}\right)\left(1+\frac{1}{4}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{2n}\right)\left(1+\frac{1}{2n}\right)$$

$$= \left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{4^2}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{(2n)^2}\right)$$

と書ける．ここで，$0 \leq x \leq \dfrac{\pi}{2}$ において，$0 \leq \sin x \leq 1$ より $\sin^n x \geq \sin^{n+1} x$ が成り立つので，定理 4.1.7（4）より，$\displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin^n x\, dx \geq \int_0^{\pi/2} \sin^{n+1} x\, dx$ が成り立つ．したがって，数列 $\{S_n\}$ は下に有界な単調減少列であり，実数の連続性から，ある実数 S に収束する．よって，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{S_{2n}}{S_{2n+1}} = \frac{S}{S} = 1$ が成り立つ．上の等式について $n \to \infty$ とすると，左辺は $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{2}{\pi}\frac{S_{2n}}{S_{2n+1}} = \frac{2}{\pi}$ となり，右辺は $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\prod_{k=1}^{n}\left(1-\frac{1}{(2k)^2}\right) = \prod_{k=1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{(2k)^2}\right)$ となる．よって Wallis の公式が従う．

問題 4.3

1. （1） $\displaystyle\int_1^{\infty}\frac{1}{x^2}\,dx = \left[-\frac{1}{x}\right]_1^{\infty} = \lim_{a\to\infty}\left(-\frac{1}{a}\right) - \left(-\frac{1}{1}\right) = 1$

（2） $\displaystyle\int_0^{1}\frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = \Big[2\sqrt{x}\Big]_0^{1} = 2 - 0 = 2$

（3） $\displaystyle\int_0^{\infty} e^{-x}\,dx = \Big[-e^{-x}\Big]_0^{\infty} = \lim_{a\to\infty}(-e^{-a}) - (-e^{0}) = 1$

（4） 以下の計算の途中で，$a = \dfrac{1}{e^b}$ としている．$a \to 0+0$ のとき，$b \to \infty$ である．

$$\int_0^1 x\log x\,dx = \left[\frac{1}{2}x^2\log x\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{1}{2}x^2\,\frac{1}{x}\,dx = \frac{1}{2}\,1^2\,0 - \lim_{a\to 0+0}\frac{1}{2}a^2\log a - \frac{1}{2}\int_0^1 x\,dx$$

$$= -\lim_{b\to\infty}\frac{1}{2}\frac{-b}{e^{2b}} - \frac{1}{2}\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1 = 0 - \frac{1}{4}(1-0) = -\frac{1}{4}$$

（５） $\displaystyle\int_0^\infty xe^{-x}\,dx = \Big[-xe^{-x}\Big]_0^\infty - \int_0^\infty (-e^{-x})\,dx = \Big[-xe^{-x}\Big]_0^\infty - \Big[e^{-x}\Big]_0^\infty = \Big[(-x-1)e^{-x}\Big]_0^\infty = \lim_{a\to\infty}(-a-1)e^{-a} - \lim_{b\to 0+0}(-b-1)e^{-b} = 0-(-1) = 1$

（６） $\displaystyle\int_0^\infty xe^{-x^2}\,dx = \Big[-\frac{1}{2}e^{-x^2}\Big]_0^\infty = \lim_{a\to\infty}\left(-\frac{1}{2}e^{-a^2}\right) - \left(-\frac{1}{2}\right) = 0+\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

2. （１） $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{x}\,dx = \Big[\log x\Big]_1^\infty = \lim_{a\to\infty}\log a - 0 = \infty$ より，∞ に発散する．

（２） $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x}\,dx = \Big[\log x\Big]_0^1 = 0 - \lim_{a\to 0+0}\log a = \infty$ より，∞ に発散する．

（３） 以下の計算の途中で，$a = \dfrac{1}{e^b}$ としている．$a\to 0+0$ のとき，$b\to\infty$ である．$\displaystyle\int_0^1 \log x\,dx = \Big[x\log x - x\Big]_0^1 = (0-1) - \lim_{a\to 0+0}(a\log a - a) = -1 - \lim_{b\to\infty}\left(\frac{b}{e^b} - \frac{1}{e^b}\right) = -1-0 = -1$ より，-1 に収束する．

（４） $0\le x\le \dfrac{\pi}{2}$ において $\sin x \le x$ が成り立つことから，$0 < x \le \dfrac{\pi}{2}$ において $\dfrac{1}{\sin x} \ge \dfrac{1}{x}$ である．(2) より $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x}\,dx$ は発散するので，定理 4.3.9 より $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sin x}\,dx$ も発散する．$1\le x\le\dfrac{\pi}{2}$ において $\sin x \ge 0$ であることから，$\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{1}{\sin x}\,dx$ も発散する．

（５） $f(x) = \sin\dfrac{1}{x}$, $g(x) = 1$ とすると，$\left|\sin\dfrac{1}{x}\right| \le 1$ および $\displaystyle\int_0^1 dx = \Big[x\Big]_0^1 = 1-0 = 1$ より，$f(x)$ と $g(x)$ は定理 4.3.6 の条件 (1) と (2) を満たす．よって，$\displaystyle\int_0^1 \sin\frac{1}{x}\,dx$ は収束する．

（６） $x=2$ は積分範囲に含まれているが，$\dfrac{2x}{x^2-4}$ の定義域には含まれていないことに注意する．

$$\begin{aligned}\int_1^\infty \frac{2x}{x^2-4}\,dx &= \int_1^2 \frac{2x}{x^2-4}\,dx + \int_2^\infty \frac{2x}{x^2-4}\,dx\\ &= \left(\lim_{a\to 2-0}\log|a^2-4| - \log|1-4|\right) + \left(\lim_{b\to\infty}\log|b^2-4| - \lim_{c\to 2+0}\log|c^2-4|\right)\\ &= (-\infty - \log 3) + (\infty - (-\infty))\end{aligned}$$

$\displaystyle\int_1^\infty \frac{2x}{x^2-4}\,dx$ が収束するためには，上の式の 3 か所の極限がそれぞれ収束する必要がある．実際には，3 か所はいずれも発散しているので，$\displaystyle\int_1^\infty \frac{2x}{x^2-4}\,dx$ は発散している．

3. （１） $\displaystyle\int_0^a \frac{dx}{\sqrt{a-x}} = \Big[-2\sqrt{a-x}\Big]_0^a = 0-(-2\sqrt{a}) = 2\sqrt{a}$

（２） $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \Big[\arcsin x\Big]_0^1 = \frac{\pi}{2} - 0 = \frac{\pi}{2}$

（３） $\displaystyle\int_1^\infty \frac{\log x}{x^2}\,dx = \Big[-\frac{1}{x}\log x\Big]_1^\infty + \int_1^\infty \frac{1}{x^2}\,dx = (0-0) + \Big[-\frac{1}{x}\Big]_1^\infty = 0-(-1) = 1$

（４） $\displaystyle\int_0^\infty \frac{1}{(x+1)(x+2)}\,dx = \int_0^\infty \left(\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2}\right)dx = \Big[\log|x+1| - \log|x+2|\Big]_0^\infty = \Big[\log\left|\frac{x+1}{x+2}\right|\Big]_0^\infty = \lim_{a\to\infty}\log\frac{1+\frac{1}{a}}{1+\frac{2}{a}} - \log\frac{1}{2} = 0 - (\log 2^{-1}) = \log 2$

（５） $t = \sin x$ とおくと，$dt = \cos x\,dx$ であり，変数 x における積分範囲 $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$ は，変数 t においては

$[0,1]$ となる．よって，$\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\cos x}{\sqrt{\sin x}}\,dx = \int_0^1 t^{-\frac{1}{2}}\,dt = \Big[2\sqrt{t}\Big]_0^1 = 2-0=2$

（６） $t = \sqrt{\dfrac{x-a}{b-x}}$ とおくと，$t^2(b-x) = x-a$ より $x = \dfrac{bt^2+a}{t^2+1}$ であり，

$$dx = \frac{2bt(t^2+1)-(bt^2+a)\,2t}{(t^2+1)^2}\,dt = \frac{2bt-2at}{(t^2+1)^2}\,dt$$

となる．変数 x における積分範囲 $[a,b]$ は，変数 t においては $[0,\infty)$ となる．よって，

$$\int_a^b \frac{dx}{\sqrt{(x-a)(b-x)}} = \int_a^b \frac{1}{(b-x)\sqrt{\frac{x-a}{b-x}}}\,dx = \int_0^\infty \frac{1}{\left(b-\frac{bt^2+a}{t^2+1}\right)t}\,\frac{2bt-2at}{(t^2+1)^2}\,dt$$

$$= \int_0^\infty \frac{1}{bt^2+b-bt^2-a}\,\frac{2b-2a}{t^2+1}\,dt = \int_0^\infty \frac{2}{(t^2+1)}\,dt$$

$$= 2\Big[\arctan t\Big]_0^\infty = \lim_{t\to\infty} 2\arctan t - 0 = 2\,\frac{\pi}{2} = \pi$$

（７） $x = \dfrac{1}{\cos\theta}$ とおくと，$dx = \dfrac{\sin\theta}{\cos^2\theta}d\theta$ であり，変数 x における積分範囲 $[1,\infty)$ は，変数 θ においては $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$ となる．よって，

$$\int_1^\infty \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}} = \int_0^{\pi/2} \frac{1}{\frac{1}{\cos\theta}\sqrt{\frac{1}{\cos^2\theta}-1}}\,\frac{\sin\theta}{\cos^2\theta}d\theta = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin\theta}{\sqrt{1-\cos^2\theta}}d\theta$$

$$= \int_0^{\pi/2} d\theta = \Big[\theta\Big]_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{2}$$

（８） $t = e^{-x}$ とおくと，$dt = -e^{-x}\,dx$ であり，変数 x における積分範囲 $[0,\infty)$ は，変数 t においては 1 から 0 になるので，

$$\int_0^\infty e^{-x}\log(e^x-1)\,dx = \int_1^0 \log\left(\frac{1}{t}-1\right)(-dt) = \int_0^1 \log\left(\frac{1-t}{t}\right)dt$$

$$= \int_0^1 (\log(1-t)-\log t)\,dt = \Big[(t-1)\log(1-t)\Big]_0^1 - \int_0^1 dt - \Big[t\log t - t\Big]_0^1$$

$$= 0-0-\Big[t\Big]_0^1 - (-1-0) = -1+1 = 0$$

4. $p \geq 1,\, q \geq 1$ のときは広義積分ではないので，それ以外の場合について証明する．$p \geq 1,\, 0 < q < 1$ の場合，$0 \leq x \leq 1$ より，$x^{p-1}(1-x)^{q-1} \leq (1-x)^{q-1}$ が成り立つ．定理 4.3.6 を用いると，

$$\int_0^1 (1-x)^{q-1}dx = \left[-\frac{1}{q}(1-x)^q\right]_0^1 = 0 - \left(-\frac{1}{q}\right) = \frac{1}{q}$$

より，広義積分 $\displaystyle\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}\,dx$ は収束する．$0<p<1,\, q \geq 1$ の場合も同様に示せる．$0<p<1$, $0<q<1$ の場合，$0 < x \leq \dfrac{1}{2}$ のとき，$x^{p-1}(1-x)^{q-1} \leq x^{p-1}\left(\dfrac{1}{2}\right)^{q-1}$ であり，右辺の $0 \leq x \leq \dfrac{1}{2}$ における広義積分は

$$\int_0^{1/2} x^{p-1}\left(\frac{1}{2}\right)^{q-1}dx = \frac{1}{2^{q-1}}\left[\frac{1}{p}x^p\right]_0^{1/2} = \frac{1}{2^{q-1}}\left(\frac{1}{p}\left(\frac{1}{2}\right)^p - 0\right) = \frac{1}{p\,2^{p+q-1}}$$

より収束する．よって，定理 4.3.6 より，$\displaystyle\int_0^{1/2} x^{p-1}(1-x)^{q-1}\,dx$ も収束する．積分範囲 $\dfrac{1}{2} \leq x \leq 1$ についても同様に示せる．

5. $x>0$ について，$e^x = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \cdots + \frac{1}{n!}x^n + \cdots$ より，$e^x > \frac{x^n}{n!}$ が成り立つ．よって，

$$e^{-x}x^{s-1} = \frac{x^{s-1}}{e^x} < x^{s-1}\frac{n!}{x^n} = n!x^{s-1-n}$$

が成り立つ．$n>s$ と選んでおくと，右辺の広義積分は

$$\int_1^{\infty} n!x^{s-1-n}dx = \left[\frac{n!}{s-n}x^{s-n}\right]_1^{\infty} = \frac{n!}{s-n}(0-1) = \frac{n!}{n-s}$$

より収束する．よって，定理 4.3.6 より，$\displaystyle\int_1^{\infty} e^{-x}x^{s-1}\,dx$ は収束する．積分範囲 $0 \leq x \leq 1$ については，$e^{-x}x^{s-1} \leq x^{s-1}$ であり，右辺の広義積分は

$$\int_0^1 x^{s-1}dx = \left[\frac{1}{s}x^s\right]_0^1 = \frac{1}{s} - 0 = \frac{1}{s}$$

より収束する．よって，定理 4.3.6 より，$\displaystyle\int_0^1 e^{-x}x^{s-1}\,dx$ は収束する．

6. 定理 4.3.17 (3) に $p = \frac{a+1}{2}$, $q = \frac{b+1}{2}$ を代入すると，主張の式が得られる．

7. （1） $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin^3 x\cos^4 x\,dx = \frac{1}{2}B\left(2, \frac{5}{2}\right) = \frac{\Gamma(2)\,\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)}{2\Gamma\left(\frac{9}{2}\right)} = \frac{1!\,\frac{3}{2}\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{2\frac{7}{2}\frac{5}{2}\frac{3}{2}\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} = \frac{\frac{3}{4}\sqrt{\pi}}{\frac{105}{8}\sqrt{\pi}} = \frac{3}{4}\frac{8}{105} = \frac{2}{35}$

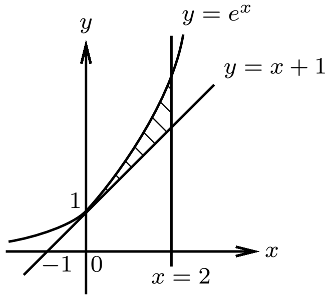
（2） $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin^4 x\cos^6 x\,dx = \frac{1}{2}B\left(\frac{5}{2}, \frac{7}{2}\right) = \frac{\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)\,\Gamma\left(\frac{7}{2}\right)}{2\Gamma\left(6\right)} = \frac{\frac{3}{2}\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\,\frac{5}{2}\frac{3}{2}\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{2\cdot 5!} = \frac{\frac{3}{4}\sqrt{\pi}\,\frac{15}{8}\sqrt{\pi}}{120}$
$= \frac{45}{32}\pi\,\frac{1}{240} = \frac{3}{512}\pi$

（3） $t = x^4$ とおくと, $dt = 4x^3\,dx$ であり, 変数 x における積分範囲 $[0,1]$ は, 変数 θ においても $[0,1]$ となる．よって, 例題 4.3.16 より, $\displaystyle\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{1-x^4}}\,dx = \int_0^1 \frac{t^{\frac{1}{4}}}{\sqrt{1-t}}\,\frac{1}{4t^{\frac{3}{4}}}\,dt = \int_0^1 \frac{1}{4}t^{\frac{1}{4}-\frac{3}{4}}(1-t)^{-\frac{1}{2}}\,dt =$ $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{4}t^{-\frac{1}{2}}(1-t)^{-\frac{1}{2}}\,dt = \frac{1}{4}B\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{4}$

（4） $t = x^2$ とおくと, $dt = 2x\,dx$ であり, 変数 x における積分範囲 $[0,\infty)$ は, 変数 θ においても $[0,\infty)$ となる．よって，$\displaystyle\int_0^{\infty} x^5 e^{-x^2}\,dx = \int_0^{\infty} t^{\frac{5}{2}}e^{-t}\frac{1}{2t^{\frac{1}{2}}}\,dt = \int_0^{\infty}\frac{1}{2}e^{-t}t^{\frac{5}{2}-\frac{1}{2}}\,dt = \int_0^{\infty}\frac{1}{2}e^{-t}t^2\,dt =$ $\frac{1}{2}\Gamma(3) = \frac{1}{2}\,2\cdot 1\cdot\Gamma(1) = 1$

問題 4.4

1. （1） 曲線が囲む部分は下図のようになる．その面積は, $\displaystyle\int_0^2 (e^x - x - 1)\,dx = \left[e^x - \frac{1}{2}x^2 - x\right]_0^2 =$ $(e^2 - 2 - 2) - (e^0 - 0) = e^2 - 4 - 1 = e^2 - 5$



（2） $ax^2 + by^2 = c\ \ (a, b, c > 0)$ は楕円である．$y = 0$ のとき $x = \pm\sqrt{\frac{c}{a}}$ であり，$s = \sqrt{\frac{c}{a}}$ とおくと $-s \leq x \leq s$ である．よって，$y = \pm\sqrt{\frac{c - ax^2}{b}}$ より，$\displaystyle 2\int_{-s}^{s}\sqrt{\frac{c-ax^2}{b}}\,dx$ が求める面積である．

$x = s\sin\theta$ とおくと，$dx = s\cos\theta\,d\theta$ であり，変数 x における積分範囲 $[-s, s]$ は，変数 θ においては $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ となる．よって，

$$2\int_{-s}^{s}\sqrt{\frac{c-ax^2}{b}}\,dx = \frac{2}{\sqrt{b}}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\sqrt{c(1-\sin^2\theta)}\,s\cos\theta\,d\theta = \frac{2}{\sqrt{b}}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}s\sqrt{c}\,\cos^2\theta\,d\theta$$

$$= \frac{2}{\sqrt{b}}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}s\sqrt{c}\,\frac{1+\cos 2\theta}{2}\,d\theta = \left[\frac{s\sqrt{c}}{\sqrt{b}}\left(\theta + \frac{1}{2}\sin 2\theta\right)\right]_{-\pi/2}^{\pi/2}$$

$$= \frac{s\sqrt{c}}{\sqrt{b}}\left(\left(\frac{\pi}{2}+0\right) - \left(-\frac{\pi}{2}+0\right)\right) = \frac{s\sqrt{c}\,\pi}{\sqrt{b}} = \frac{c\pi}{\sqrt{ab}}$$

2. （1） 定理 4.4.5 より，$x = y^2$ を x 軸を中心に回転させた立体の定義式は $x = (\sqrt{y^2+z^2})^2 = y^2 + z^2$ である．$y = t$ での切り口の式は $y^2 + z^2 = t$，つまり，半径 $\sqrt{t}$ の円である．円が囲む面積は $S(t) = \pi(\sqrt{t})^2 = \pi t$ である．よって，定理 4.4.3 より，

$$V = \int_0^4 S(t)dt = \int_0^4 \pi t\,dt = \left[\frac{\pi}{2}t^2\right]_0^4 = \frac{\pi}{2}(16-0) = 8\pi$$

（2） 回転体の定義式 $x = y^2 + z^2$ に $y = t$ を代入すると，$x = t^2 + z^2$ である．xz-平面上の曲線 $z = \pm\sqrt{x-t^2}$ と直線 $x = 4$ が囲む領域の面積は

$$S(t) = 2\int_{t^2}^{4}\sqrt{x-t^2}\,dx = \left[\frac{4}{3}(x-t^2)^{\frac{3}{2}}\right]_{t^2}^{4} = \frac{4}{3}(4-t^2)^{\frac{3}{2}}$$

である．よって， 定理 4.4.3 より

$$V = \int_{-2}^{2}S(t)\,dt = \int_{-2}^{2}\frac{4}{3}(4-t^2)^{\frac{3}{2}}\,dt$$

となる．ここで，$t = 2\sin\theta$ とおくと，$dt = 2\cos\theta\,d\theta$ であり，変数 t における積分範囲 $[-2, 2]$ は，変数 θ においては $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ となる．よって，定理 4.2.8 より，

$$V = \int_{-\pi/2}^{\pi/2}\frac{4}{3}(4-4\sin^2\theta)^{\frac{3}{2}}\,2\cos\theta\,d\theta = \frac{64}{3}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos^4\theta\,d\theta$$

$$= \frac{128}{3}\int_0^{\pi/2}\cos^4\theta\,d\theta = \frac{128}{3}\,\frac{(4-1)!!}{4!!}\,\frac{\pi}{2} = \frac{128}{3}\,\frac{3\cdot 1}{4\cdot 2}\,\frac{\pi}{2} = 8\pi$$

3. $f(t) = e^{-t}\cos\pi t,\ g(t) = e^{-t}\sin\pi t$ とおくと，定理 4.4.9 より，

$$\int_0^2\sqrt{(f'(t))^2 + (g'(t))^2}\,dt = \int_0^2\sqrt{(-e^{-t}\cos\pi t - \pi e^{-t}\sin\pi t)^2 + (-e^{-t}\sin\pi t + \pi e^{-t}\cos\pi t)^2}\,dt$$

$$= \int_0^2 e^{-t}\sqrt{(\cos\pi t + \pi\sin\pi t)^2 + (\sin\pi t - \pi\cos\pi t)^2}\,dt$$

$$= \int_0^2\sqrt{1+\pi^2}e^{-t}\,dt = \sqrt{1+\pi^2}\Big[-e^{-t}\Big]_0^2$$

$$= \sqrt{1+\pi^2}\,(-e^{-2} - (-e^0)) = \sqrt{1+\pi^2}\,(1-e^{-2})$$

4. $f'(t) = 8 - 2t,\ g(t) = 0$ として定理 4.4.9 を適用すると，

$$\int_0^5\sqrt{(f'(t))^2 + (g'(t))^2}\,dt = \int_0^5|(f'(t))|\,dt = \int_0^5|8-2t|\,dt = \int_0^4(8-2t)\,dt + \int_4^5(2t-8)\,dt$$

$$= \Big[8t - t^2\Big]_0^4 + \Big[t^2 - 8t\Big]_4^5 = (32-16) - 0 + (25-40) - (16-32) = 17$$

5. （1） 定理 4.4.11 より，

$$\int_0^{\pi/4} \sqrt{1+\left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)^2}\,dx = \int_0^{\pi/4} \frac{1}{\cos x}\,dx$$

を求めればよい．$t=\sin x$ とおくと，$dt=\cos x\,dx$ であり，変数 x における積分範囲 $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ は，変数 t においては $\left[0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right]$ となる．よって，

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi/4} \frac{1}{\cos x}\,dx &= \int_0^{\pi/4} \frac{\cos x}{1-\sin^2 x}\,dx = \int_0^{1/\sqrt{2}} \frac{1}{(1-t)(1+t)}\,dt \\ &= \int_0^{1/\sqrt{2}} \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-t}+\frac{1}{1+t}\right)dt = \frac{1}{2}\Big[-\log|1-t|+\log|1+t|\Big]_0^{1/\sqrt{2}} \\ &= \frac{1}{2}\left[\log\left|\frac{1+t}{1-t}\right|\right]_0^{1/\sqrt{2}} = \frac{1}{2}\left(\log\frac{1+\frac{1}{\sqrt{2}}}{1-\frac{1}{\sqrt{2}}}\right) = \frac{1}{2}\left(\log\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}\right) \\ &= \frac{1}{2}\log(\sqrt{2}+1)^2 = \log(\sqrt{2}+1)\end{aligned}$$

（2） $f(x)=\frac{a}{2}\left(e^{x/a}+e^{-x/a}\right)$ とおくと，定理 4.4.11 より，

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1} \sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx &= \int_{-1}^{1} \sqrt{1+\frac{1}{4}\left(e^{x/a}-e^{-x/a}\right)^2}\,dx = \int_{-1}^{1} \frac{1}{2}\left(e^{x/a}+e^{-x/a}\right)dx \\ &= \frac{1}{2}\Big[ae^{x/a}-ae^{-x/a}\Big]_{-1}^{1} = \frac{1}{2}\Big(a(e^{1/a}-e^{-1/a})-a(e^{-1/a}-e^{1/a})\Big) = a(e^{1/a}-e^{-1/a})\end{aligned}$$

（3） $f(t)=t-\sin t,\ g(t)=1-\cos t$ とおくと，定理 4.4.9 より，

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi} \sqrt{(f'(t))^2+(g'(t))^2}\,dt &= \int_0^{2\pi} \sqrt{(1-\cos t)^2+(\sin t)^2}\,dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{2-2\cos t}\,dt \\ &= \int_0^{2\pi} \sqrt{2-2\left(1-2\sin^2\frac{t}{2}\right)}\,dt = \int_0^{2\pi} 2\sin\frac{t}{2}\,dt = \left[-4\cos\frac{t}{2}\right]_0^{2\pi} = 4-(-4) = 8\end{aligned}$$

（4） $f(t)=a\cos^3 t,\ g(t)=a\sin^3 t$ とおくと，定理 4.4.9 より，

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi} \sqrt{(f'(t))^2+(g'(t))^2}\,dt &= \int_0^{2\pi} \sqrt{(-3a\cos^2 t\sin t)^2+(3a\sin^2 t\cos t)^2}\,dt \\ &= \int_0^{2\pi} 3a\sqrt{\cos^4 t\sin^2 t+\sin^4 t\cos^2 t}\,dt = \int_0^{2\pi} 3a|\sin t\cos t|\,dt\end{aligned}$$

$s=\sin t$ とおくと，$ds=\cos t\,dt$ であり，

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi} \sqrt{(f'(t))^2+(g'(t))^2}\,dt &= \int_0^{2\pi} 3a|\sin t\cos t|\,dt \\ &= \int_0^{\pi/2} 3a\sin t\cos t\,dt + \int_{\pi/2}^{\pi} 3a(-\sin t\cos t)\,dt \\ &\quad + \int_{\pi}^{3\pi/2} 3a\sin t\cos t\,dt + \int_{3\pi/2}^{2\pi} 3a(-\sin t\cos t)\,dt \\ &= \int_0^1 3as\,ds - \int_1^0 3as\,ds + \int_0^{-1} 3as\,ds - \int_{-1}^0 3as\,ds \\ &= 4\int_0^1 3as\,ds = 4\left[\frac{3a}{2}s^2\right]_0^1 = 4\,\frac{3a}{2} = 6a\end{aligned}$$

6. p.115 で得られた式 $E[X^2]=\dfrac{2}{\lambda^2}$ を用いる．

$$E[X^3]=\int_{-\infty}^{\infty}x^3f(x)dx=\int_0^{\infty}x^3\lambda e^{-\lambda x}\,dx$$
$$=\Big[-x^3e^{-\lambda x}\Big]_0^{\infty}+\int_0^{\infty}3x^2e^{-\lambda x}\,dx=0+\frac{3}{\lambda}E[X^2]=\frac{3}{\lambda}\frac{2}{\lambda^2}=\frac{6}{\lambda^3}$$
$$E[X^4]=\int_{-\infty}^{\infty}x^4f(x)dx=\int_0^{\infty}x^4\lambda e^{-\lambda x}\,dx$$
$$=\Big[-x^4e^{-\lambda x}\Big]_0^{\infty}+\int_0^{\infty}4x^3e^{-\lambda x}\,dx\ =0+\frac{4}{\lambda}E[X^3]=\frac{4}{\lambda}\frac{6}{\lambda^3}=\frac{24}{\lambda^4}$$

問題 5.1

1. （1） $\{z\in\mathbf{R}\mid z\geq 0\}$
（2） $\mathbf{R}$
（3） $\mathbf{R}$
（4） $\{z\in\mathbf{R}\mid z>0\}$
（5） $\{z\in\mathbf{R}\mid z\geq 0\}$
（6） $\mathbf{R}$

2. （1） 開集合である．閉集合ではない．
（2） 開集合でも閉集合でもない．
（3） 開集合ではない．閉集合である．
（4） 開集合ではない．閉集合である．

3. （1） 連続ではない．
（2） 連続である．
（3） 連続ではない．
（4） 連続である．

4. （1） $(x,y)\neq(0,0)$ において $0\leq\left|x\sin\dfrac{1}{x^2+y^2}\right|\leq|x|\leq\sqrt{x^2+y^2}$ が成り立つので，はさみうち（定理 1.2.8）により $\sqrt{x^2+y^2}\to 0$ のとき $x\sin\dfrac{1}{x^2+y^2}\to 0$ が成り立つ．よって，$f(x,y)$ は $(x,y)=(0,0)$ において連続である．
（2） $t>0$ のとき $f(t,0)=\dfrac{t}{t^2}=\dfrac{1}{t}$ であり，$t\to 0$ とすると $f(x,y)$ の値は無限大に発散する．よって，$f(x,y)$ は $(x,y)=(0,0)$ において連続ではない．

5. （1） $f_x=e^y$，$f_y=xe^y$
（2） $f_x=6xy^2+1$，$f_y=6x^2y+1$
（3） $f_x=-e^{-x-y}$，$f_y=-e^{-x-y}$
（4） $f_x=ye^y$，$f_y=xe^y+(xy+1)e^y=(xy+x+1)e^y$
（5） $f_x=\dfrac{(xy+1)-xy}{(xy+1)^2}=\dfrac{1}{(xy+1)^2}$，$f_y=\dfrac{-x^2}{(xy+1)^2}$
（6） $f_x=yx^{y-1}$，$f_y=x^y\log x$
（7） $f_x=6xy\cos\left(3x^2y\right)$，$f_y=3x^2\cos\left(3x^2y\right)$
（8） $f_x=\left(3x^2-2y\right)\sec^2\left(x^3-2xy\right)$，$f_y=-2x\sec^2\left(x^3-2xy\right)$
（9） $f_x=\dfrac{2x+y}{x^2+xy+y^3}$，$f_y=\dfrac{x+3y^2}{x^2+xy+y^3}$
（10） $f_x=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\dfrac{2x}{2\sqrt{x^2+y^2}}=\dfrac{x}{x^2+y^2}$，$f_y=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\dfrac{2y}{2\sqrt{x^2+y^2}}=\dfrac{y}{x^2+y^2}$

(11) 問 3.1.5 (1) より，$(\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ である．よって，$f_x = -\dfrac{1}{\sqrt{1-(x+y^2)^2}}$，$f_y = -\dfrac{2y}{\sqrt{1-(x+y^2)^2}}$

(12) 問 3.1.5 (2) より，$(\arctan x)' = \dfrac{1}{1+x^2}$ である．よって，$f_x = \dfrac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}\left(-\dfrac{y}{x^2}\right) = -\dfrac{y}{x^2+y^2}$，

$f_y = \dfrac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}\dfrac{1}{x} = \dfrac{x}{x^2+y^2}$

問題 5.2

1. $t>0$ のとき $f(t,t) = \dfrac{2t^2}{2t^2} = 1$ であり，$f(t,0)=0$ である．$t \to 0$ とすると，それぞれの極限は一致しない．よって，$f(x,y)$ は $(x,y)=(0,0)$ において連続ではない．特に，定理 5.2.4 より全微分可能ではない．一方，$f(0,y)=0$, $f(x,0)=0$ が成り立つことから，$f_x(0,0)=f_y(0,0)=0$ である．つまり，$f(x,y)$ は $(x,y)=(0,0)$ において偏微分可能である．
2. 以下，$z=F(t)$ として $F'(t)$ を計算する．
   (1) $F'(t) = 2x\cdot 2t + 3y^2\cdot 3t^2 = 2t^2\cdot 2t + 3t^6\cdot 3t^2 = 4t^3+9t^8$
   (2) $F'(t) = 4\sin(2x)\cos(2x)\cdot(-\sin t) + 0\cdot\cos t = -4\sin(2\cos t)\cos(2\cos t)\sin t$
   (3) $F'(t) = 2xy^3\cdot(-\sin t) + 3x^2y^2\cdot\cos t = 2\cos t\sin^3 t\cdot(-\sin t) + 3\cos^2 t\sin^2 t\cdot\cos t = -2\cos t\sin^4 t + 3\cos^3 t\sin^2 t$
   (4) $$F'(t) = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+1}}\cdot 1 + \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+1}}\cdot\frac{1}{t}$$
   $$= \frac{t}{\sqrt{t^2+(\log t)^2+1}}\cdot 1 + \frac{\log t}{\sqrt{t^2+(\log t)^2+1}}\cdot\frac{1}{t} = \frac{t^2+\log t}{t\sqrt{t^2+(\log t)^2+1}}$$
3. (1) $z_u = z_xx_u + z_yy_u = (2(x+y)-2(x-y))\cdot 1 + (2(x+y)+2(x-y))\cdot 1 = 4(x+y) = 8u$,
   $z_v = z_xx_v + z_yy_v = (2(x+y)-2(x-y))\cdot 1 + (2(x+y)+2(x-y))\cdot(-1) = -4(x-y) = -8v$
   (2) $z_u = z_xx_u + z_yy_u = 2x\cos(x^2-2y)\cdot 1 - 2\cos(x^2-2y)\cdot v = 2(x-v)\cos(x^2-2y) = 2u\cos(u^2+v^2)$，$z_v = z_xx_v + z_yy_v = 2x\cos(x^2-2y)\cdot 1 - 2\cos(x^2-2y)\cdot u = 2v\cos(u^2+v^2)$
   (3) $z_u = z_xx_u + z_yy_u = y\cos v + x\sin v = u\sin v\cos v + u\cos v\sin v = u\sin 2v$，$z_v = z_xx_v + z_yy_v = y(-u\sin v) + xu\cos v = -u^2\sin^2 v + u^2\cos^2 v = u^2\cos 2v$
4. p.126 で紹介した連鎖律 (chain rule) の行列表示を用いる．$z=f(x,y)$ の変数 r,s による偏微分を合成関数の微分を使って表すと
   $$\begin{pmatrix} z_r & z_s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_x & z_y \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_r & x_s \\ y_r & y_s \end{pmatrix}$$
   となる．また，$x=x(u,v)$, $y=y(u,v)$ と $u=u(r,s)$, $v=v(r,s)$ の合成関数の微分により
   $$\begin{pmatrix} x_r & x_s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_u & x_v \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_r & u_s \\ v_r & v_s \end{pmatrix}$$
   および
   $$\begin{pmatrix} y_r & y_s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_u & y_v \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_r & u_s \\ v_r & v_s \end{pmatrix}$$
   が得られる．2 つ目と 3 つ目の式はまとめて
   $$\begin{pmatrix} x_r & x_s \\ y_r & y_s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_r & u_s \\ v_r & v_s \end{pmatrix}$$
   と書くことができる．この式を最初の式に代入すると，主張の式が得られる．
5. $f(r\cos\theta, r\sin\theta) = e^{-r^2}$ である．よって，関数 $f(x,y)$ は，$f_r = -2re^{-r^2} < 0$ より半径方向に狭義単調減少し，$f_\theta = 0$ より回転方向には値は変化しないことが分かる．

6. （1） $z = f(x, y)$ とする．$f_x = 2x + y$, $f_y = x + 3y^2$ より，$f_x(3, -1) = 5$, $f_y(x, y) = 6$ である．よって，$z - 5 = 5(x - 3) + 6(y + 1) = 5x + 6y - 4$ より，$z = 5x + 6y - 4$

（2） $z = f(x, y)$ とする．$f_x = \dfrac{\sqrt{y}}{2\sqrt{x}}$, $f_y = \dfrac{\sqrt{x}}{2\sqrt{y}}$ より，$f_x(1, 4) = 1$, $f_y(x, y) = \dfrac{1}{4}$ である．よって，$z - 2 = (x - 1) + \dfrac{1}{4}(y - 4) = x + \dfrac{1}{y} - 2$ より，$z = x + \dfrac{1}{4}y$

7. 接平面の式は $f_x(a, b)(x - a) + f_y(a, b)(y - b) - (z - f(a, b)) = 0$ であるが，これは内積を使って

$$\begin{pmatrix} f_x(a,b) \\ f_y(a,b) \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x - a \\ y - b \\ z - f(a,b) \end{pmatrix} = 0$$

と書くことができる．つまり，ベクトル $\begin{pmatrix} f_x(a,b) \\ f_y(a,b) \\ -1 \end{pmatrix}$ は接平面に垂直なベクトルである．法線は点 Q を通り，この方向に伸びる直線なので，法線上の点 (x, y, z) はパラメータ $t \in \mathbf{R}$ を用いて

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ f(a,b) \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} f_x(a,b) \\ f_y(a,b) \\ -1 \end{pmatrix}$$

と表すことができる．この式から t を消去すると，主張の式が得られる．

問題 5.3

1. （1） $f_x = e^y, f_y = xe^y, f_{xx} = 0, f_{xy} = f_{yx} = e^y, f_{yy} = xe^y$

（2） $f_x = 6xy^2 + 1,\ f_y = 6x^2y + 1,\ f_{xx} = 6y^2,\ f_{xy} = f_{yx} = 12xy,\ f_{yy} = 6x^2$

（3） $f_x = -e^{-x-y}, f_y = -e^{-x-y}, f_{xx} = e^{-x-y}, f_{xy} = f_{yx} = e^{-x-y}, f_{yy} = e^{-x-y}$

（4） $f_x = ye^y, f_y = (xy + x + 1)e^y, f_{xx} = 0, f_{xy} = f_{yx} = (y + 1)e^y, f_{yy} = (xy + 2x + 1)e^y$

（5） $f_x = \dfrac{1}{(xy+1)^2}, f_y = \dfrac{-x^2}{(xy+1)^2}, f_{xx} = \dfrac{-2y}{(xy+1)^3}, f_{xy} = f_{yx} = \dfrac{-2x}{(xy+1)^3}, f_{yy} = \dfrac{2x^3}{(xy+1)^3}$

（6） $f_x = yx^{y-1}, f_y = x^y \log x, f_{xx} = y(y-1)x^{y-2}, f_{xy} = f_{yx} = x^{y-1}(1 + y\log x), f_{yy} = x^y(\log x)^2$

（7） $f_x = -ye^{-xy}, f_y = -xe^{-xy}, f_{xx} = y^2e^{-xy}, f_{xy} = f_{yx} = (xy - 1)e^{-xy}, f_{yy} = x^2e^{-xy}$

（8） $f_x = y\cos(xy), f_y = x\cos(xy), f_{xx} = -y^2\sin(xy), f_{xy} = f_{yx} = \cos(xy) - xy\sin(xy), f_{yy} = -x^2\sin(xy)$

2. （1） $(1 + xy)^4$ を展開した式の 3 次の項までを並べればよい．

$$(1 + xy)^4 = 1 + 4xy + 6x^2y^2 + 4x^3y^3 + x^4y^4$$

より，答えは $1 + 4xy$ である．真面目に計算すると，$f_x = 4y(1 + xy)^3$, $f_y = 4x(1 + xy)^3$, $f_{xx} = 12y^2(1 + xy)^2$, $f_{xy} = f_{yx} = 4(1 + xy)^3 + 12xy(1 + xy)^3 = (4 + 4xy + 12xy)(1 + xy)^2 = (4 + 16xy)(1 + xy)^2$, $f_{xxx} = 24y^3(1 + xy)$, $f_{xxy} = 24y(1 + xy)^2 + 24xy^2(1 + xy)$, $f_{xyy} = 24x(1 + xy)^2 + 24x^2y(1 + xy)$, $f_{yyy} = 24x^3(1 + xy)$ より，$(0, 0)$ における偏微分の値は $f(0, 0) = 1$, $f_{xy}(0, 0) = f_{yx}(0, 0) = 4$ 以外は 0 である．よって，$1 + 2\tfrac{4}{2}!xy = 1 + 4xy$ となる．

（2） すべての偏導関数は e^{x+y} なので，$1 + x + y + \dfrac{1}{2}(x^2 + 2xy + y^2) + \dfrac{1}{6}(x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3)$

（3） $f_x = y\sin x + xy\cos x$, $f_y = x\sin x$, $f_{xx} = 2y\cos x - xy\sin x$, $f_{xy} = f_{yx} = \sin x + x\cos x$, $f_{yy} = 0$, $f_{xxx} = -3y\sin x - xy\cos x$, $f_{xxy} = 2\cos x - x\sin x$, $f_{xyy} = f_{yyy} = 0$ より，$(0, 0)$ における偏微分の値は $f_{xxy}(0, 0) = 2$ 以外は 0 である．よって，$\dfrac{2}{3!}{}_3C_1x^2y = x^2y$ となる．

（4） $f_x = -2xe^{-x^2-y^2}$, $f_y = -2ye^{-x^2-y^2}$, $f_{xx} = (4x^2 - 2)e^{-x^2-y^2}$, $f_{xy} = f_{yx} = 4xye^{-x^2-y^2}$, $f_{yy} = (4y^2 - 2)e^{-x^2-y^2}$, $f_{xxx} = (12 - 8x^2)xe^{-x^2-y^2}$, $f_{xxy} = (4 - 8x^2)ye^{-x^2-y^2}$, $f_{xyy} =$

$(4-8y^2)xe^{-x^2-y^2}$，$f_{yyy}=(12-8y^2)ye^{-x^2-y^2}$ より，$(0,0)$ における偏微分の値は $f(0,0)=1$，$f_{xx}(0,0)=f_{yy}(0,0)=-2$ 以外は 0 である．よって，$1+\dfrac{-2}{2!}x^2+\dfrac{-2}{2!}y^2=1-x^2-y^2$

3. （1） 偏導関数は問題 5.3.2 (1) で計算しているので，$(1,1)$ を代入すると，$f(1,1)=16$, $f_x(1,1)=f_y(1,1)=32$, $f_{xx}(1,1)=f_{yy}(1,1)=48$. $f_{xy}(1,1)=f_{yx}(1,1)=80$ より，

$$16+32(x-1)+32(y-1)+\frac{1}{2}\left(48(x-1)^2+80\cdot 2(x-1)(y-1)+48(y-1)^2\right)$$

$$=16+32(x-1)+32(y-1)+24(x-1)^2+80(x-1)(y-1)+24(y-1)^2$$

（2） $f_x=\dfrac{1}{x}$, $f_x=\dfrac{1}{y}$, $f_{xx}=-\dfrac{1}{x^2}$, $f_{xy}=0$, $f_{yy}=-\dfrac{1}{y^2}$, より，$f(1,1)=0$, $f_x(1,1)=f_y(1,1)=1$, $f_{xx}(1,1)=f_{yy}(1,1)=-1$, $f_{xy}(1,1)=f_{yx}(1,1)=0$ である．よって，$(x-1)+(y-1)-\dfrac{1}{2}(x-1)^2-\dfrac{1}{2}(y-1)^2$

（3） $f_x=f_y=-\dfrac{1}{(x+y)^2}$，$f_{xx}=f_{xy}=f_{yx}=f_{yy}=\dfrac{2}{(x+y)^3}$ より，$f(1,1)=\dfrac{1}{2}$，$f_x(1,1)=f_y(1,1)=-\dfrac{1}{4}$，$f_{xx}(1,1)=f_{xy}(1,1)=f_{yx}(1,1)=f_{yy}(1,1)=\dfrac{1}{4}$ である．よって，$\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{4}(x-1)-\dfrac{1}{4}(y-1)+\dfrac{1}{8}(x-1)^2+\dfrac{1}{4}(x-1)(y-1)+\dfrac{1}{8}(y-1)^2$

（4） $f_x=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$，$f_y=\dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$，$f_{xx}=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}-\dfrac{x^2}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}=\dfrac{y^2}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}$，$f_{xy}=f_{yx}=-\dfrac{xy}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}$，$f_{yy}=\dfrac{x^2}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}$ より，$\sqrt{2}+\dfrac{1}{\sqrt{2}}(x-1)+\dfrac{1}{\sqrt{2}}(y-1)+\dfrac{1}{4\sqrt{2}}(x-1)^2-\dfrac{1}{2\sqrt{2}}(x-1)(y-1)+\dfrac{1}{4\sqrt{2}}(y-1)^2$

4. 例題 5.2.9 の解答において

$$\frac{\partial z}{\partial r}=\frac{\partial z}{\partial x}\cos\theta+\frac{\partial z}{\partial y}\sin\theta,\quad \frac{\partial z}{\partial \theta}=-\frac{\partial z}{\partial x}r\sin\theta+\frac{\partial z}{\partial y}r\cos\theta$$

が得られている．さらに偏微分すると

$$\frac{\partial^2 z}{\partial r^2}=\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\cos\theta+\frac{\partial z}{\partial y}\sin\theta\right)=\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)\cos\theta+\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)\sin\theta$$

$$=\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\frac{\partial x}{\partial r}+\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}\frac{\partial y}{\partial r}\right)\cos\theta+\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\frac{\partial x}{\partial r}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\frac{\partial y}{\partial r}\right)\sin\theta$$

$$=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\cos^2\theta+2\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\sin\theta\cos\theta+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\sin^2\theta$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial \theta^2}=\frac{\partial}{\partial \theta}\left(-\frac{\partial z}{\partial x}r\sin\theta+\frac{\partial z}{\partial y}r\cos\theta\right)$$

$$=\frac{\partial}{\partial \theta}\left(-\frac{\partial z}{\partial x}\right)r\sin\theta-\frac{\partial z}{\partial x}r\cos\theta+\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)r\cos\theta-\frac{\partial z}{\partial y}r\sin\theta$$

$$=-\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\frac{\partial x}{\partial \theta}+\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}\frac{\partial y}{\partial \theta}\right)r\sin\theta+\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\frac{\partial x}{\partial \theta}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\frac{\partial y}{\partial \theta}\right)r\cos\theta-r\frac{\partial z}{\partial r}$$

$$=-\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}(-r\sin\theta)+\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}r\cos\theta\right)r\sin\theta+\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}(-r\sin\theta)+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}r\cos\theta\right)r\cos\theta-r\frac{\partial z}{\partial r}$$

$$=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}r^2\sin^2\theta-2\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}r^2\sin\theta\cos\theta+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}r^2\cos^2\theta-r\frac{\partial z}{\partial r}$$

となる．よって，

$$\frac{\partial z^2}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial z}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 z}{\partial \theta^2}=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\cos^2\theta+2\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\sin\theta\cos\theta+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\sin^2\theta+\frac{1}{r}\frac{\partial z}{\partial r}$$
$$+\frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}r^2\sin^2\theta-2\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}r^2\sin\theta\cos\theta+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}r^2\cos^2\theta-r\frac{\partial z}{\partial r}\right)$$
$$=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$$

より主張が従う．

5. （１） (a,b) におけるヘッセ行列は $\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix}$，ヘッシアンは 4

（２） (a,b) におけるヘッセ行列は $\begin{pmatrix}-2 & 0\\ 0 & -2\end{pmatrix}$，ヘッシアンは 4

（３） (a,b) におけるヘッセ行列は $\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & -2\end{pmatrix}$，ヘッシアンは -4

（４） (a,b) におけるヘッセ行列は $\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$，ヘッシアンは -1

6. （１） $f(x,y)=x^2-xy+y^2+x-5y$ とおく．$f_x=2x-y+1=0$, $f_y=-x+2y-5=0$ を解くと，$x=1$, $y=3$ が得られる．よって，$(1,3)$ が極値を与える点の候補となる．$f_{xx}=2$, $f_{xy}=f_{yx}=-1$, $f_{yy}=2$ より，$D=2\cdot 2-(-1)^2=3>0$．また，$f_{xx}(1,3)=2$ である．よって，定理 5.3.10 (1) より $f(x,y)$ は $(1,3)$ において極小．極小値は $f(1,3)=1-3+9+1-15=-7$ である．

（２） $f(x,y)=xy(x+y-3)=x^2y+xy^2-3xy$ とおく．$f_x=2xy+y^2-3y=0$, $f_y=x^2+2xy-3x=0$ を解く．2 式の差により，$y^2-x^2=3y-3x$ が得られる．$x=y$ のとき，$y=x$ を $f_x=0$ に代入すると，$2x^2+x^2-3x=3x(x-1)=0$ より，$(x,y)=(0,0),(1,1)$ が解となる．$x\neq y$ のときは，$y^2-x^2=3y-3x$ より $y+x=3$ となる．$f_y=0$ に $y=3-x$ を代入すると，$x^2+2x(3-x)-3x=x(3-x)$ より，$(x,y)=(0,3),(3,0)$ が解となる．$f_{xx}=2y$, $f_{xy}=f_{yx}=2x+2y-3$, $f_{yy}=2x$ である．

- $(x,y)=(0,0)$ のとき，$D=0\cdot 0-(-3)^2=-9<0$ であり，定理 5.3.10 (2) より極値ではない．
- $(x,y)=(3,0)$ のとき，$D=0\cdot 6-3^2=-9<0$ であり，定理 5.3.10 (2) より極値ではない．
- $(x,y)=(0,3)$ のとき，$D=6\cdot 0-3^2=-9<0$ であり，定理 5.3.10 (2) より極値ではない．
- $(x,y)=(1,1)$ のとき，$D=2\cdot 2-1^2=3>0$，$f_{xx}(1,1)=2>0$ であり，定理 5.3.10 (1) より極小．極小値は $f(1,1)=-1$ である．

（３） $f(x,y)=2x^3+3x^2-y^2$ とおく．$f_x=6x^2+6x=0$, $f_y=-2y=0$ を解くと，$(x,y)=(0,0),(-1,0)$ が得られる．$f_{xx}=12x+6$, $f_{xy}=f_{yx}=0$, $f_{yy}=-2$ である．

- $(x,y)=(0,0)$ のとき，$D=6\cdot(-2)-0=-12<0$ であり，定理 5.3.10 (2) より極値ではない．
- $(x,y)=(-1,0)$ のとき，$D=(-6)\cdot(-2)-0=12>0$，$f_{xx}(-1,0)=-6<0$ であり，定理 5.3.10 (1) より極大．極大値は $f(-1,0)=-2+3-0=1$ である．

（４） $f(x,y)=(x^2+y^2)e^{x-y}$ とおく．$f_x=(2x+x^2+y^2)e^{x-y}=0$, $f_y=(2y-x^2-y^2)e^{x-y}=0$ を解く．$x^2+y^2=-2x=2y$ より，$y=-x$ が得られるので，$f_x=0$ に代入すると，$2x+2x^2=0$ となる．よって，$(0,0),(-1,1)$ が解である．$f_{xx}=(2+4x+x^2+y^2)e^{x-y}$, $f_{xy}=f_{yx}=(2y-2x-x^2-y^2)e^{x-y}$, $f_{yy}=(2-4y+x^2+y^2)e^{x-y}$ である．

- $(x,y)=(0,0)$ のとき，$D=2\cdot 2-0=4>0$，$f_{xx}(0,0)=2>0$ であり，定理 5.3.10 (1)

より極小．極小値は $f(0,0)=0$ である．

- $(x,y)=(-1,1)$ のとき，$D=0\cdot 0-(2e^{-2})^2=-4e^{-4}<0$ であり，定理 5.3.10（2）より極値ではない．

（5） $f(x,y)=xe^{-\frac{x^2+y^2}{2}}$ とおく．$f_x=(1-x^2)e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}=0$ $f_y=-xye^{-\frac{x^2+y^2}{2}}=0$ を解くと，$(x,y)=(-1,0),(1,0)$ が得られる．$f_{xx}=(x^3-3x)e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}$, $f_{xy}=f_{yx}=(x^2-1)ye^{-\frac{x^2+y^2}{2}}$, $f_{yy}=(y^2-1)xe^{-\frac{x^2+y^2}{2}}$ である．

- $(x,y)=(-1,0)$ のとき，$D=2e^{-\frac{1}{2}}\cdot e^{-\frac{1}{2}}-0=2e^{-1}>0$，$f_{xx}(-1,0)=2e^{-\frac{1}{2}}>0$ であり，定理 5.3.10（1）より極小．極小値は $f(-1,0)=-e^{-\frac{1}{2}}$ である．
- $(x,y)=(1,0)$ のとき，$D=-2e^{-\frac{1}{2}}\cdot(-e^{-\frac{1}{2}})-0=2e^{-1}>0$，$f_{xx}(1,0)=-2e^{-\frac{1}{2}}<0$ であり，定理 5.3.10（1）より極大．極大値は $f(1,0)=e^{-\frac{1}{2}}$ である．

（6） $f(x,y)=xye^{-\frac{x^2+y^2}{2}}$ とおく．$f_x=(1-x^2)ye^{-\frac{x^2+y^2}{2}}=0$ $f_y=(1-y^2)xe^{-\frac{x^2+y^2}{2}}=0$ を解くと，$(x,y)=(0,0),(\pm1,\pm1),(\pm1,\mp1)$ が得られる．$f_{xx}=(x^2-3)xye^{-\frac{x^2+y^2}{2}}$, $f_{xy}=f_{yx}=(x^2-1)(y^2-1)e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}$, $f_{yy}=(y^2-3)xye^{-\frac{x^2+y^2}{2}}$ である．

- $(x,y)=(0,0)$ のとき，$D=0\cdot 0-1^2=-1<0$ であり，定理 5.3.10（2）より極値ではない．
- $(x,y)=(\pm1,\pm1)$ のとき，$D=(-2e^{-1})\cdot(-2e^{-1})-0=4e^{-2}>0$，$f_{xx}(\pm1,\pm1)=-2e^{-1}<0$ であり，定理 5.3.10（1）より極大．極大値は $f(\pm1,\pm1)=e^{-1}$ である．
- $(x,y)=(\pm1,\mp1)$ のとき，$D=2e^{-1}\cdot 2e^{-1}-0=4e^{-2}>0$，$f_{xx}(\pm1,\mp1)=2e^{-1}>0$ であり，定理 5.3.10（1）より極小．極小値は $f(\pm,\mp1)=-e^{-1}$ である．

問題 5.4

1. （1） $y=\sqrt{x}$

（2） $y=-\sqrt{x}$

（3） $y=2\sqrt{2-x^2}$

2. （1） $f(x,y)=x^4+y^4-2$ とおくと，$f_x(x,y)=4x^3$, $f_y(x,y)=4y^3$ より，$f_x(1,1)=4$, $f_y(1,1)=4\neq 0$ である．よって，陰関数定理（定理 5.4.2）より $f(x,\varphi(x))=0$ を満たす関数 $y=\varphi(x)$ が存在し，$\varphi'(1)=-\dfrac{4}{4}=-1$ となる．

（2） $f(x,y)=2x^3y-xy^2-y^3$ とおくと，$f_x(x,y)=6x^2y-y^2$, $f_y(x,y)=2x^3-2xy-3y^2$ より，$f_x(1,1)=5$, $f_y(1,1)=-3\neq 0$ である．よって，陰関数定理（定理 5.4.2）より $f(x,\varphi(x))=0$ を満たす関数 $y=\varphi(x)$ が存在し，$\varphi'(1)=-\dfrac{5}{-3}=\dfrac{5}{3}$ となる．

（3） （2）の計算により，$f_x(1,-2)=-16$, $f_y(1,-2)=-6\neq 0$ である．よって，陰関数定理（定理 5.4.2）より $f(x,\varphi(x))=0$ を満たす関数 $y=\varphi(x)$ が存在し，$\varphi'(1)=-\dfrac{-16}{-6}=-\dfrac{8}{3}$ となる．

（4） $f(x,y)=2e^x+e^y-e^{x+y}$ とおくと，$f_x(x,y)=2e^x-e^{x+y}$, $f_y(x,y)=e^y-e^{x+y}$ より，$f_x(\log 2,2\log 2)=-4$, $f_y(\log 2,2\log 2)=-4\neq 0$ である．よって，陰関数定理（定理 5.4.2）より $f(x,\varphi(x))=0$ を満たす関数 $y=\varphi(x)$ が存在し，$\varphi'(1)=-\dfrac{-4}{-4}=-1$ となる．

3. （1） $f(x,y)=x$, $g(x,y)=x^2+y^2-4$ とおく．$g_x(x,y)=2x=0$, $g_y(x,y)=2y=0$ を満たす点は $(x,y)=(0,0)$ のみなので，$g(x,y)=0$ の条件下でラグランジュの未定乗数法（定理 5.4.6）を用いることができる．$F(x,y)=f(x,y)-\lambda g(x,y)=x-\lambda(x^2+y^2-4)$ とおくと，

$$F_x(x,y)=1-2\lambda x=0,\quad F_y(x,y)=-2\lambda y=0$$

となる．最初の式より $\lambda\neq 0$ であり，2 つ目の式より $y=0$ が得られ，$g(x,y)=0$ より $x=2,-2$ となる．対応する λ の値はそれぞれ $\dfrac{1}{4},-\dfrac{1}{4}$ である．よって，$(x,y)=(2,0),(-2,0)$ が極値を与える点の候補となる．ここで $g(x,y)=0$ は平面上の有界閉集合であることから，最大値・最小値の定理により，最大値と最小値が存在する．よって，$f(2,0)=2$, $f(-2,0)=-2$ より，最大値は 2,

最小値は -2 である．

（2） $f(x,y)=(x+y-1)^2$, $g(x,y)=x^2+y^2-2$ とおく．$g_x(x,y)=2x=0$, $g_y(x,y)=2y=0$ を満たす点は $(x,y)=(0,0)$ のみなので，$g(x,y)=0$ の条件下でラグランジュの未定乗数法（定理 5.4.6）を用いることができる．$F(x,y)=f(x,y)-\lambda g(x,y)=(x+y-1)^2-\lambda(x^2+y^2-2)$ とおくと，

$$F_x(x,y)=2(x+y-1)-2\lambda x=0,\quad F_y(x,y)=2(x+y-1)-2\lambda y=0$$

となる．$\lambda\neq 0$ のとき，2 式の差から $x=y$ となるので，$g(x,y)=0$ より $(x,y)=(1,1),(-1,-1)$ である．対応する λ の値はそれぞれ 1, -3 である．よって，$(x,y)=(1,1),(-1,-1)$ が極値を与える点の候補となる．$\lambda=0$ のときは，$x+y-1=0$ を満たす点 (x,y) が候補となる．ここで $g(x,y)=0$ は平面上の有界閉集合であることから，最大値・最小値の定理により，最大値と最小値が存在する．よって，$f(1,1)=1$, $f(-1,-1)=9$ であり，$x+y-1=0$ 上では $f(x,y)$ の値は 0 であることから，最大値は 9, 最小値は 0 である．

（3） $f(x,y)=x^2+y^2$, $g(x,y)=xy-4$ とおく．$g_x(x,y)=y=0$, $g_y(x,y)=x=0$ を満たす点は $(x,y)=(0,0)$ のみなので，$g(x,y)=0$ の条件下でラグランジュの未定乗数法（定理 5.4.6）を用いることができる．$F(x,y)=f(x,y)-\lambda g(x,y)=x^2+y^2-\lambda(xy-4)$ とおくと，

$$F_x(x,y)=2x-\lambda y=0,\quad F_y(x,y)=2y-\lambda x=0$$

となる．2 式の差から $2(x-y)=\lambda(y-x)$ となるので，$x=y$ あるいは $\lambda=-2$ である．$\lambda=-2$ とすると，$y=-x$ であり，$g(x,-x)=-x^2-4\neq 0$ となり，条件を満たさない．$x=y$ のとき，$g(x,y)=0$ より $(x,y)=(2,2),(-2,-2)$ である．λ の値はいずれも 2 である．よって，$(x,y)=(2,2),(-2,-2)$ が極値を与える点の候補となる．ここで $g(x,y)=0$ は平面上の双曲線であり，有界ではないため，最大値・最小値の定理は使えない．ただ，双曲線の形状と $f(x,y)$ は原点からの距離の 2 乗であることから，最小値が存在することが分かる．よって，$f(2,2)=f(-2,-2)=8$ が最小値である．

4. $f(x,y)=g(x)+h(y)=100+x^2+50y$, $G(x,y)=x+y-2026$ とおく．ただし，製品数は負にはならないので，$x\geq 0$, $y\geq 0$ とする．$G_x(x,y)=1$, $G_y(x,y)=1$ よりラグランジュの未定乗数法（定理 5.4.6）を用いることができる．

$$F(x,y)=f(x,y)-\lambda G(x,y)=100+x^2+50y-\lambda(x+y-2026)$$

とおくと，

$$F_x(x,y)=2x-\lambda=0,\quad F_y(x,y)=50-\lambda=0$$

となる．よって，$\lambda=50$, $x=25$ であり，$y=2026-x=2001$ である．このときの総コストは $f(25,2001)=100+625+100050=100775$ である．一方，$x=0$ のときの総コストは $f(0,2026)=100+101300=101400$，$y=0$ のときの総コストは $f(2026,0)=100+2026^2=4104776$ である．集合 $\{(x,y)\in\mathbf{R}^2\mid G(x,y)=0,\ x\geq 0,\ y\geq 0\}$ は平面上の有界閉集合であることから，最大値・最小値の定理により，最大値と最小値が存在する．上で求めた 3 つの値を比較すると，

$$100775<101400<4104776$$

となる．よって，最大値を与える生産数は $x=2026$, $y=0$ であり，最小値を与える生産数は $x=25$, $y=2001$ である．

5. 購入数は負ではないので，$x\geq 0$, $y\geq 0$ とする．$g(x,y)=100x+200y-6000$ とおく．

$$F(x,y)=f(x,y)-\lambda g(x,y)=x^{\frac{2}{5}}y^{\frac{3}{5}}-\lambda(100x+200y-6000)$$

とおくと，

$$F_x(x,y)=\frac{2}{5}x^{-\frac{3}{5}}y^{\frac{3}{5}}-100\lambda=0,\quad F_y(x,y)=\frac{3}{5}x^{\frac{2}{5}}y^{-\frac{2}{5}}-200\lambda=0$$

となる．$\frac{3}{5}x^{\frac{2}{5}}y^{-\frac{2}{5}}=200\lambda$ を $\frac{2}{5}x^{-\frac{3}{5}}y^{\frac{3}{5}}=100\lambda$ で割ると，$\frac{3}{2}xy^{-1}=2$ より，$y=\frac{3}{4}x$ が得られる．$g\left(x,\frac{3}{4}x\right)=100x+150x-6000=250x-6000=0$ より，$x=24$, $y=18$ となる．特に，

$f(24,18) > 0$ である．一方，$x=0$ および $y=0$ のときの $f(x,y)$ の値はいずれも 0 である．集合 $\{(x,y)\in\mathbf{R}^2 \mid g(x,y)=0,\ x\geq 0,\ y\geq 0\}$ は平面上の有界閉集合であることから，最大値・最小値の定理により，最大値と最小値が存在する．$x=0$ および $y=0$ のときは $f(x,y)$ は最小となるので，$x=24$, $y=18$ のとき $f(x,y)$ は最大となる．

6. （１） $(x,y)=(r\cos\theta, r\sin\theta)$ とすると，$f(x,y)=r^2$ であり，

$$D=\left\{(r\cos\theta, r\sin\theta) \mid r\leq\sqrt{8}\right\}$$

であることから，$0\leq f(x,y)=r^2\leq 8$ が従う．よって，最小値は 0，最大値は 8 である．

（２） $f_x=y=0,\ f_y=x=0$ より D の内部 $\{(x,y)\in\mathbf{R}^2 \mid x^2+y^2<8\}$ では $(0,0)$ のみが極値を与える点の候補となる．しかし，$D=0\cdot 0-1^2=-1<0$ であり，定理 5.3.10 (２) より極値を与えない．D の境界 $\{(x,y)\in\mathbf{R}^2 \mid x^2+y^2=8\}$ における極値をラグランジュ未定乗数法で調べる．$F(x,y)=xy-\lambda(x^2+y^2-8)$ とおくと，

$$F_x(x,y)=y-2\lambda x=0,\quad F_y(x,y)=x-2\lambda y=0$$

となり，$y=2\lambda x$ を 2 つ目の式に代入すると，$x=4\lambda^2 x$ となる．$x=0$ のときは $y=0$ となり $g(x,y)=0$ に反するので，$x\neq 0$ であり，$\lambda=\pm\dfrac{1}{2}$ である．$\lambda=\dfrac{1}{2}$ のとき $x=y$ であり，$g(x,y)=0$ より $(x,y)=(\pm 2,\pm 2)$ が従う．また，$\lambda=-\dfrac{1}{2}$ のとき $x=-y$ であり，$g(x,y)=0$ より $(x,y)=(\pm 2,\mp 2)$ が従う．$f(\pm 2,\pm 2)=4,\ f(\pm 2,\mp 2)=-4$ より，最大値は 4，最小値は -4 である．

（３） $f_x=x-3=0,\ f_y=y-3=0$ より D の内部 $\{(x,y)\in\mathbf{R}^2 \mid x^2+y^2<8\}$ では $(3,3)$ のみが極値を与える点の候補となるが，実際には $g(3,3)=18>4$ より，この点は D 上の点ではない．D の境界 $\{(x,y)\in\mathbf{R}^2 \mid x^2+y^2=8\}$ における極値をラグランジュ未定乗数法で調べる．$F(x,y)=(x-3)^2+(y-3)^2-\lambda(x^2+y^2-8)$ とおくと，

$$F_x(x,y)=x-3-2\lambda x=0,\quad F_y(x,y)=y-3-2\lambda y=0$$

となり，2 式の差により，$x-y=2\lambda(x-y)$ が得られる．$\lambda=\dfrac{1}{2}$ とすると，$F_x(x,y)=0$ が成り立たないので，$\lambda\neq\dfrac{1}{2}$ であり，よって $x=y$ である．このとき，$g(x,y)=0$ より，$(x,y)=(\pm 2,\pm 2)$ となる．ここで $g(x,y)=0$ は平面上の有界閉集合であることから，最大値・最小値の定理により，最大値と最小値が存在する．よって，$f(-2,-2)=50$ が最大値，$f(2,2)=2$ が最小値である．

（４） $f_x=10x+3y=0,\ f_y=3x+10y=0$ より D の内部 $\{(x,y)\in\mathbf{R}^2 \mid x^2+y^2<8\}$ では $(0,0)$ のみが極値を与える点の候補となる．$D=10\cdot 10-3^2=91>0,\ f_{xx}(0,0)=10>0$ であり，定理 5.3.10 (１) より極小．極小値は $f(0,0)=0$ である．D の境界 $\{(x,y)\in\mathbf{R}^2 \mid x^2+y^2=8\}$ における極値をラグランジュ未定乗数法で調べる．$F(x,y)=5x^2+3xy+5y^2-\lambda(x^2+y^2-8)$ とおくと，

$$F_x(x,y)=10x+3y-2\lambda x=0,\quad F_y(x,y)=3x+10y-2\lambda y=0$$

となり，2 式の差により，$7(x-y)=2\lambda(x-y)$ が得られる．$\lambda=\dfrac{7}{2}$ とすると $x=-y$ であり，$(x,y)=(\pm 2,\mp 2)$ となる．$\lambda\neq\dfrac{7}{2}$ とすると $x=y$ であり，$(x,y)=(\pm 2,\pm 2)$ となる．ここで $g(x,y)=0$ は平面上の有界閉集合であることから，最大値・最小値の定理により，最大値と最小値が存在する．よって，$f(x,y)$ を D の境界 $\{(x,y)\in\mathbf{R}^2 \mid x^2+y^2=8\}$ に制限した関数の最大値は $f(\pm 2,\pm 2)=52$，最小値は $f(\pm 2,\mp 2)=28$ である．前半の議論と合わせると，$f(x,y)$ の D 上での最大値は 52，最小値は 0 となる．

問題 5.5

1. $S(p,q)=(y_1-17.7)^2+(y_2-13.3)^2+(y_3-9.9)^2+(y_4-7.7)^2$ とおき，

$$y_1=p+q,\ y_2=2p+q,\ y_3=3p+q,\ y_4=4p+q$$

を代入すると，

$$S(p,q) = 30p^2 + 4q^2 + 20pq - 209.6p - 97.2q + 647.48$$

となる．偏微分を行うと，

$$\frac{\partial S}{\partial p} = 60p + 20q - 209.6, \quad \frac{\partial S}{\partial q} = 20p + 8q - 97.2$$

を得る．これらを 0 とする連立一次方程式を解くと，$p = -3.34$, $q = 20.5$ となるので，求める回帰直線は $y = -3.34x + 20.5$ である．

2. 定理 5.5.1 の証明と同様に，$f(p,q) = \sum_{i=1}^{n}(pa_i + q - b_i)^2$ とおく．回帰直線 $y = px + q$ の係数 p, q は は $f_p(p,q) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} 2a_i(pa_i + q - b_i) = 0$ と $f_q(p,q) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} 2(pa_i + q - b_i) = 0$ を満たす．この 2 式をまとめて行列で表示すると，

$$\begin{pmatrix} \displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_i^2 & \displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_i \\ \displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_i & n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_i b_i \\ \displaystyle\sum_{i=1}^{n} b_i \end{pmatrix}$$

となる．左辺は ${}^tAA\mathbf{x}$ であり，右辺は ${}^tA\mathbf{b}$ であるから，これは正規方程式である．

3. 曲線 $f(x,y) = 1$ のパラメータ表示を $(x,y) = (a\cos\theta, b\sin\theta)$ で与える．$\theta = \theta_0$ において (x_0, y_0) とする．$y_0 \neq 0$ のときの接線の方程式は定理 3.1.24 より

$$y = \frac{b\cos\theta_0}{-a\sin\theta_0}(x - a\cos\theta_0) + b\sin\theta_0 = \frac{b^2x_0}{-a^2y_0}(x - x_0) + y_0$$

で与えられる．整理すると，$-a^2y_0(y - y_0) = b^2x_0(x - x_0)$ より，$b^2x_0x + a^2y_0y = b^2x_0^2 + a^2y_0^2$ となり，a^2b^2 で割ると $\dfrac{x_0x}{a^2} + \dfrac{y_0y}{b^2} = \dfrac{x_0^2}{a^2} + \dfrac{y_0^2}{b^2} = 1$ となる．よって，$y_0 \neq 0$ のときの接線の方程式は $\dfrac{x_0x}{a^2} + \dfrac{y_0y}{b^2} = 1$ である．$y_0 = 0$ のときの曲線上の点は $(a,0)$, $(-a,0)$ であり，そこでの接線の方程式は $x = \pm a$ である．よって，これらの点でも接線は式 $\dfrac{x_0x}{a^2} + \dfrac{y_0y}{b^2} = 1$ により与えられる．以上により，接線の方程式は $\dfrac{x_0x}{a^2} + \dfrac{y_0y}{b^2} = 1$ であることが従う．勾配ベクトルは $\nabla f(x,y) = \left(\dfrac{2x_0}{a^2}, \dfrac{2y_0}{b^2}\right)$ である．一方，接線は直線 $\dfrac{x_0x}{a^2} + \dfrac{y_0y}{b^2} = 0$ と平行であり，この式は内積を使って

$$\begin{pmatrix} x_0/a^2 \\ y_0/b^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0$$

と書くことができる．つまり，この直線上のすべての点と勾配ベクトル $\nabla f(x,y)$ は直交する．接線はこの直線と平行であることから，接線と勾配ベクトル $\nabla f(x,y)$ も直交することが従う．

4. $\nabla f(x,y) = (2x, 8y)$ より，

$$(a_{n+1}, b_{n+1}) = (a_n, b_n) - \alpha(2a_n, 8b_n) = (a_n, b_n) - (0.2a_n, 0.8b_n) = (0.8a_n, 0.2b_n)$$

である．よって，求める点列は $\{(a_n, b_n)\} = \left\{\left(\left(\dfrac{4}{5}\right)^n a_0, \left(\dfrac{1}{5}\right)^n b_0\right)\right\}$ であり，この点列は $n \to \infty$ とすると原点 $(0,0)$ に収束する．

問題 6.1

1. （１） $\displaystyle\iint_D (x + 2y)dxdy = \int_1^2 \int_0^1 (x + 2y)dxdy = \int_1^2 \left[\frac{1}{2}x^2 + 2xy\right]_0^1 dy = \int_1^2 \left(\frac{1}{2} + 2y\right) dy = \left[\frac{1}{2}y + y^2\right]_1^2 = (1 + 4) - \left(\frac{1}{2} + 1\right) = \frac{7}{2}$

（2） $\displaystyle\iint_D (x+y)(2x-3y)dxdy = \int_1^2\int_0^1 (2x^2-xy-3y^2)dxdy = \int_1^2 \left[\frac{2}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2y - 3xy^2\right]_0^1 dy = \int_1^2 \left(\frac{2}{3} - \frac{1}{2}y - 3y^2\right) dy = \left[\frac{2}{3}y - \frac{1}{4}y^2 - y^3\right]_1^2 = \left(\frac{4}{3} - 1 - 8\right) - \left(\frac{2}{3} - \frac{1}{4} - 1\right) = -\frac{85}{12}$

（3） $\displaystyle\iint_D e^{x+y}dxdy = \int_1^2\int_0^1 e^xe^y dxdy = \int_1^2 e^y\,dy\cdot\int_0^1 e^x dx = \Big[e^y\Big]_1^2\cdot\Big[e^x\Big]_0^1 = (e^2-e)(e-1) = e(e-1)^2$

（4） $\displaystyle\iint_D (x+y)e^x dxdy = \int_1^2\int_0^1 (x+y)e^x dxdy = \int_1^2\int_0^1 (xe^x + ye^x)dxdy$

$\displaystyle= \int_1^2 \Big[xe^x - e^x + ye^x\Big]_0^1 dy = \int_1^2 (ye-(-1+y))dy = \int_1^2 ((e-1)y+1)dy = \left[\frac{e-1}{2}y^2 + y\right]_1^2 = (2(e-1)+2) - \left(\frac{e-1}{2} + 1\right) = \frac{3e-1}{2}$

2. （1） $\displaystyle\iint_D xy\,dxdy = \int_0^1\int_0^{1-y} xy\,dxdy = \int_0^1 \left[\frac{1}{2}x^2y\right]_0^{1-y} = \int_0^1 \frac{1}{2}(1-y)^2y\,dy$

$\displaystyle= \int_0^1 \frac{1}{2}(y^3 - 2y^2 + y)\,dy = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{4}y^4 - \frac{2}{3}y^3 + \frac{1}{2}y^2\right]_0^1 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{4} - \frac{2}{3} + \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{24}$

（2） $\displaystyle\iint_D xy\,dxdy = \int_0^1\int_{2y}^2 xy\,dxdy = \int_0^1 \left[\frac{1}{2}x^2y\right]_{2y}^2 dy = \int_0^1 (2y - 2y^3)dy = \left[y^2 - \frac{1}{2}y^4\right]_0^1 = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

（3） 直線 $x-2y=0$ と $x+y=6$ の交点は $(4,2)$ だから，$\displaystyle\iint_D xy\,dxdy = \int_0^2\int_{2y}^{6-y} xy\,dxdy = \int_0^2 \left[\frac{1}{2}x^2y\right]_{2y}^{6-y} dy = \int_0^2 \frac{1}{2}((6-y)^2y - 4y^3)dy = \int_0^2 \frac{1}{2}(36y - 12y^2 - 3y^3)dy$

$\displaystyle= \frac{1}{2}\left[18y^2 - 4y^3 - \frac{3}{4}y^4\right]_0^2 = \frac{1}{2}(72-32-12) = 14$

（4） 直線 $x-2y=0$ と $x+y=6$ の交点は $(4,2)$，直線 $2x-y=0$ と $x+y=6$ の交点は $(2,4)$ である．よって，

$$\begin{aligned}
\iint_D xy\,dxdy &= \int_0^2\int_{y/2}^{2y} xy\,dxdy + \int_2^4\int_{y/2}^{6-y} xy\,dxdy \\
&= \int_0^2 \left[\frac{1}{2}x^2y\right]_{y/2}^{2y} dy + \int_2^4 \left[\frac{1}{2}x^2y\right]_{y/2}^{6-y} dy \\
&= \int_0^2 \left(2y^3 - \frac{1}{8}y^3\right) dy + \int_2^4 \left(\frac{1}{2}(6-y)^2y - \frac{1}{8}y^3\right) dy \\
&= \int_0^2 \frac{15}{8}y^3 dy + \int_2^4 \frac{1}{2}\left(36y - 12y^2 + \frac{3}{4}y^3\right) dy \\
&= \left[\frac{15}{32}y^4\right]_0^2 + \frac{1}{2}\left[18y^2 - 4y^3 + \frac{3}{16}y^4\right]_2^4 \\
&= \frac{15}{2} + \frac{1}{2}\left((18\cdot 4^2 - 4^4 + 3\cdot 4^2) - (18\cdot 4 - 32 + 3)\right) = \frac{15}{2} + \frac{37}{2} = 26
\end{aligned}$$

3. （1） $y=x^2$ と $y=x+2$ の交点は，$x^2-x-2=(x-2)(x+1)=0$ より，$(-1,1)$, $(2,4)$ である．よって，

$$\iint_D (x+2y)\,dxdy = \int_{-1}^2\int_{x^2}^{x+2} (x+2y)dydx = \int_{-1}^2 \Big[xy + y^2\Big]_{x^2}^{x+2} dx$$

$$= \int_{-1}^{2}((x(x+2)+(x+2)^2)-(x^3+x^4))dx = \int_{-1}^{2}(-x^4-x^3+2x^2+6x+4)dx$$
$$= \left[-\frac{1}{5}x^5-\frac{1}{4}x^4+\frac{2}{3}x^3+3x^2+4x\right]_{-1}^{2}$$
$$= \left(-\frac{32}{5}-4+\frac{16}{3}+12+8\right)-\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{4}-\frac{2}{3}+3-4\right)=\frac{333}{20}$$

（2） $x=y$ と $x=2-y^2$ の交点は，$y+y^2-2=(y-1)(y+2)=0$ より，$(-2,-2)$, $(1,1)$ である．よって，

$$\iint_D (2-y)\,dxdy = \int_{-2}^{1}\int_{y}^{2-y^2}(2-y)\,dxdy = \int_{-2}^{1}\Big[(2-y)x\Big]_{y}^{2-y^2}dy$$
$$= \int_{-2}^{1}(2-y)(2-y^2-y)dy = \int_{-2}^{1}(y^3-y^2-4y+4)dy$$
$$= \left[\frac{1}{4}y^4-\frac{1}{3}y^3-2y^2+4y\right]_{-2}^{1} = \left(\frac{1}{4}-\frac{1}{3}-2+4\right)-\left(4+\frac{8}{3}-8-8\right)=\frac{45}{4}$$

（3） 極座標を使って計算する．途中, $t=\cos\theta$ とおく．$\displaystyle\iint_D x^2y\,dxdy = \int_0^{\pi/2}\int_0^2 r^3\cos^2\theta\sin\theta\, r drd\theta$
$\displaystyle = \int_0^2 r^4\,dr\cdot\int_1^0 t^2(-dt) = \left[\frac{1}{5}r^5\right]_0^2\cdot\left[\frac{1}{3}t^3\right]_0^1 = \frac{32}{5}\,\frac{1}{3}=\frac{32}{15}$

（4） $ex\le e^{y+1}=ee^y$ より，$x\le e^y$ である．また，$e^2x\ge e^{y+1}\ge e^2e^{y-1}$ より，$x\ge e^{y-1}$ である．よって，$\displaystyle\iint_D \frac{y}{x}\,dxdy = \int_0^2\int_{e^{y-1}}^{e^y}\frac{y}{x}\,dxdy = \int_0^2\Big[y\log x\Big]_{e^{y-1}}^{e^y}dy = \int_0^2(y^2-y(y-1))dy =$ $\displaystyle\int_0^2 y\,dy = \left[\frac{1}{2}y^2\right]_0^2 = 2-0=2$

（5） $x=2y$ と $y=1$ の交点は $(2,1)$ である．この問題は e^{y^2} の積分の計算ができないため, 変数 x で先に積分する必要がある．$\displaystyle\iint_D e^{y^2}\,dxdy = \int_0^1\int_0^{2y}e^{y^2}\,dxdy = \int_0^1\left[xe^{y^2}\right]_0^{2y}dy = \int_0^1 2ye^{y^2}\,dy =$ $\displaystyle\left[e^{y^2}\right]_0^1 = e^1-e^0=e-1$

4. 積分範囲は $D=\{(x,y)\in\mathbf{R}^2\mid 0\le x\le 2,\ 0\le y\le x(2-x)\}$ である．これは放物線 $y=x(2-x)$ と x 軸に囲まれた領域であり，$x^2-2x+y=0$ を解くと，$x=1\pm\sqrt{1-y}$ となるので，$D=\{(x,y)\in\mathbf{R}^2\mid 1-\sqrt{1-y}\le x\le 1+\sqrt{1-y},\ 0\le y\le 1\}$ と表すことができる．よって，求める積分の式は $\displaystyle\int_0^1 dy\int_{1-\sqrt{1-y}}^{1+\sqrt{1-y}}f(x,y)dx$ である．

5. 底面は $z=0$ を代入すると，$D=\left\{(x,y)\in\mathbf{R}^2\mid x\ge 0,\, y\ge 0,\, x+\frac{1}{2}y\le 1\right\}$ で与えられることが分かる．（立体の図を書いて，$z=0$ が底面になっていることを理解する必要があります！）$D=\{(x,y)\in\mathbf{R}^2\mid 0\le x\le 1,\, 0\le y\le 2(1-x)\}$ と書き換えて計算すると，

$$\iint_D 2\left(1-x-\frac{1}{2}y\right)dxdy = 2\int_0^1\left(\int_0^{2(1-x)}\left(1-x-\frac{1}{2}y\right)dy\right)dx$$
$$= 2\int_0^1\left[y-xy-\frac{1}{4}y^2\right]_0^{2(1-x)}dx = 2\int_0^1\left(2(1-x)^2-(1-x)^2\right)dx$$
$$= 2\int_0^1(1-x)^2dx = 2\left[-\frac{(1-x)^3}{3}\right]_0^1=\frac{2}{3}$$

6. 定理 6.1.16 より，微分と積分の順番を交換してよい．

（1） $f'(t) = \dfrac{d}{dt}\displaystyle\int_1^2 \dfrac{e^{tx}}{x}dx = \int_1^2 \dfrac{\partial}{\partial t}\dfrac{e^{tx}}{x}dx = \int_1^2 e^{tx}\,dx = \left[\dfrac{1}{t}e^{tx}\right]_1^2 = \dfrac{e^{2t}-e^t}{t}$

（2） $f'(t) = \dfrac{d}{dt}\displaystyle\int_1^2 \log(tx)\,dx = \int_1^2 \dfrac{\partial}{\partial t}\log(tx)\,dx = \int_1^2 \dfrac{x}{tx}dx = \int_1^2 \dfrac{1}{t}dx = \dfrac{1}{t}\Big[x\Big]_1^2 = \dfrac{1}{t}$

（3） $f'(t) = \dfrac{d}{dt}\displaystyle\int_a^\pi \dfrac{\sin(tx)}{x}\,dx = \int_a^\pi \dfrac{\partial}{\partial t}\dfrac{\sin(tx)}{x}\,dx = \int_a^\pi \cos(tx)\,dx = \left[\dfrac{\sin tx}{t}\right]_a^\pi = \dfrac{\sin\pi t - \sin at}{t}$

問題 6.2

1. $\phi'(t) = -\sin t$ および $0 \le t \le \pi$ において $\sin t \ge 0$ であることから，定理 6.2.1 より，$\displaystyle\int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2}dx =$
$\displaystyle\int_0^\pi \sqrt{1-\cos^2 t}\,|-\sin t|\,dt = \int_0^\pi \sin^2 t\,dt = \int_0^\pi \dfrac{1-\cos 2t}{2}dt = \dfrac{1}{2}\left[t - \dfrac{1}{2}\sin 2t\right]_0^\pi = \dfrac{\pi}{2}$

2. $x+y=2u,\ x-y=-2v$ より，$u = \dfrac{x+y}{2},\ v = \dfrac{y-x}{2}$ であり，$x = u+v,\ y = u-v$ より，
$\dfrac{\partial\varphi(u,v)}{\partial(u,v)} = \det\begin{pmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = -2$ である．また，$f(x,y) = f(u+v, u-v) = e^{(u+v)+(u-v)} = e^{2u}$，$\varphi^{-1}(D) = \{(u,v) \in \mathbf{R}^2 \mid -1 \le u \le 1,\ -1 \le v \le 1\}$ である．よって，定理 6.2.3 より，

$$\iint_D e^{x+y}dxdy = \int_{-1}^1\int_{-1}^1 e^{2u}|-2|dudv = \int_{-1}^1 dv \cdot \int_{-1}^1 2e^{2u}du$$
$$= \Big[v\Big]_{-1}^1 \cdot \Big[e^{2u}\Big]_{-1}^1 = (1-(-1))(e^2 - e^{-2}) = 2(e^2 - e^{-2})$$

3. （1） $x+y=u,\ x-y=v$ とおくと，$x = \dfrac{u+v}{2},\ y = \dfrac{u-v}{2}$ であり，$\dfrac{\partial\varphi(u,v)}{\partial(u,v)} = \det\begin{pmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 \end{pmatrix} = -\dfrac{1}{2}$ である．また，$f(x,y) = (x+y)^2e^{x-y} = u^2e^v$，$\varphi^{-1}(D) = \{(u,v) \in \mathbf{R}^2 \mid -1 \le u \le 1,\ -1 \le v \le 1\}$ である．よって，定理 6.2.3 より，

$$\iint_D (x+y)^2e^{x-y}dxdy = \int_{-1}^1\int_{-1}^1 u^2e^v\left|-\frac{1}{2}\right|dudv = \frac{1}{2}\int_{-1}^1 u^2\,du \cdot \int_{-1}^1 e^v dv$$
$$= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{3}u^3\right]_{-1}^1 \cdot \Big[e^v\Big]_{-1}^1 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3} - \left(-\frac{1}{3}\right)\right)(e^1 - e^{-1}) = \frac{1}{3}(e - e^{-1})$$

（2） $u = 2x-y,\ v = x+2y$ とおくと，$x = \dfrac{2u+v}{5},\ y = \dfrac{-u+2v}{5}$ であり，$\dfrac{\partial\varphi(u,v)}{\partial(u,v)} = \det\begin{pmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{2}{5} & \frac{1}{5} \\ -\frac{1}{5} & \frac{2}{5} \end{vmatrix} = \dfrac{1}{5}$ である．また，$f(x,y) = (2x-y)^2(x+2y)^2 = u^2v^2$，$\varphi^{-1}(D) = \{(u,v) \in \mathbf{R}^2 \mid -1 \le u \le 1,\ -2 \le v \le 2\}$ である．よって，定理 6.2.3 より，

$$\iint_D (2x-y)^2(x+2y)^2dxdy = \int_{-2}^2\int_{-1}^1 u^2v^2\left|\frac{1}{5}\right|dudv = \frac{1}{5}\int_{-1}^1 u^2\,du \cdot \int_{-2}^2 v^2\,dv$$
$$= \frac{1}{5}\left[\frac{1}{3}u^3\right]_{-1}^1 \cdot \left[\frac{1}{3}v^3\right]_{-2}^2 = \frac{1}{5}\left(\frac{1}{3} - \left(-\frac{1}{3}\right)\right)\left(\frac{8}{3} - \left(-\frac{8}{3}\right)\right) = \frac{1}{5}\,\frac{2}{3}\,\frac{16}{3} = \frac{32}{45}$$

（3） $x = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta$ とおくと，定理 6.2.6 より，

$$\iint_D e^{\sqrt{x^2+y^2}}dxdy = \int_0^{2\pi}\int_0^1 e^r\,rdrd\theta = \int_0^{2\pi} d\theta \cdot \int_0^1 re^r\,dr$$
$$= \Big[\theta\Big]_0^{2\pi} \cdot \Big[re^r - e^r\Big]_0^1 = 2\pi((e-e) - (-1)) = 2\pi$$

（４） $x = ar\cos\theta,\ y = br\sin\theta\ (a > 0, b > 0, r \geq 0)$ とおくと，$\dfrac{\partial\varphi(r,\theta)}{\partial(r,\theta)} = \det\begin{pmatrix} x_r & x_\theta \\ y_r & y_\theta \end{pmatrix} =$ $\begin{vmatrix} a\cos\theta & -ar\sin\theta \\ b\sin\theta & br\cos\theta\frac{2}{5} \end{vmatrix} = abr$ である．また，$f(x,y) = x^2 + y^2 = r^2(a^2\cos^2\theta + b^2\sin^2\theta)$，$\varphi^{-1}(D) = \{(r,\theta) \in \mathbf{R}^2 \mid 0 \leq r \leq 1,\ 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$ である．よって，定理 6.2.3 より，

$$\iint_D (x^2+y^2)dxdy = \int_0^{2\pi}\int_0^1 r^2(a^2\cos^2\theta + b^2\sin^2\theta)|abr|\,drd\theta$$

$$= ab\int_0^1 r^3 dr \cdot \int_0^{2\pi}(a^2\cos^2\theta + b^2\sin^2\theta)d\theta$$

$$= ab\left[\frac{1}{4}r^4\right]_0^1 \cdot \int_0^{2\pi}\left(\frac{a^2(1+\cos 2\theta)}{2} + \frac{b^2(1-\cos 2\theta)}{2}\right)d\theta$$

$$= \frac{ab}{4}\left[\frac{a^2}{2}\left(\theta + \frac{1}{2}\sin 2\theta\right) + \frac{b^2}{2}\left(\theta - \frac{1}{2}\sin 2\theta\right)\right]_0^{2\pi}$$

$$= \frac{ab(a^2+b^2)\pi}{4}$$

（５） $x = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta$ とおくと，定理 6.2.6 および定理 4.2.8 より，

$$\iint_D (x^3+y^3)dxdy = \int_0^{\pi/2}\int_0^1 r^3(\cos^3\theta + \sin^3\theta)\,rdrd\theta$$

$$= \int_0^1 r^4\,dr \cdot \int_0^{\pi/2}(\cos\theta+\sin\theta)(\cos^2\theta - \cos\theta\sin\theta + \sin^2\theta)\,d\theta$$

$$= \left[\frac{1}{5}\right]_0^1 \cdot \int_0^{\pi/2}(\cos\theta+\sin\theta)(1-\cos\theta\sin\theta)\,d\theta$$

$$= \frac{1}{5}\int_0^{\pi/2}(\cos\theta + \sin\theta - \cos^2\theta\sin\theta - \cos\theta\sin^2\theta)\,d\theta$$

$$= \frac{1}{5}\int_0^{\pi/2}(\cos\theta + \sin\theta - (1-\sin^2\theta)\sin\theta - \cos\theta(1-\cos^2\theta))\,d\theta$$

$$= \frac{1}{5}\int_0^{\pi/2}(\sin^3\theta + \cos^3\theta))\,d\theta = \frac{1}{5}\left(\frac{2!!}{3!!} + \frac{2!!}{3!!}\right) = \frac{1}{5}\frac{4}{3} = \frac{4}{15}$$

4. $x = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta$ とおくと，定理 6.2.6 より，

$$\int_a^b\int_0^{f(\theta)} rdrd\theta = \int_a^b\left[\frac{1}{2}r^2\right]_0^{f(\theta)} d\theta = \int_a^b \frac{1}{2}f(\theta)^2\,d\theta$$

となり，主張が従う．

5. （１） $(x-a)^2 + y^2 = (r\cos\theta - a)^2 + (r\sin\theta)^2 = r^2 - 2ar\cos\theta + a^2$ より，

$$\left\{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid (x-a)^2 + y^2 \leq a^2\right\} = \left\{(r,\theta) \mid r^2 - 2ar\cos\theta \leq 0\right\} = \{(r,\theta) \mid r \leq 2a\cos\theta\}$$

となる．ここで，$r \geq 0$ より $\cos\theta \geq 0$ であるため，θ の存在範囲は $-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ である．

（２） $x^2 + y^2 \leq x$ を $\left(x - \dfrac{1}{2}\right)^2 + y^2 \leq \dfrac{1}{4}$ と書ける．$x = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta$ とおくと，（１）より $\varphi^{-1}(D) = \{(r,\theta) \in \mathbf{R}^2 \mid 0 \leq r \leq \cos\theta,\ -\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}\}$ と表すことができる．よって，定理 6.2.6 および定理 4.2.8 より，

$$\iint_D \sqrt{x}dxdy = \int_{-\pi/2}^{\pi/2}\int_0^{\cos\theta} \sqrt{r\cos\theta}\,rdrd\theta = \int_{-\pi/2}^{\pi/2}\left[\frac{2}{5}r^{\frac{5}{2}}\right]_0^{\cos\theta}\sqrt{\cos\theta}\,d\theta$$

$$= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{2}{5}\cos^3\theta\, d\theta = \frac{4}{5}\int_0^{\pi/2} \cos^3\theta\, d\theta = \frac{4}{5}\frac{2!!}{3!!} = \frac{4}{5}\frac{2}{3} = \frac{8}{15}$$

6. （1） 定理 6.2.12 より

$$\iint_D \sqrt{1+f_x^2+f_y^2}\, dxdy = \int_0^2\int_0^1 \sqrt{1+(-2x)^2+3^2}\, dxdy$$

$$= \int_0^2 dy \cdot \int_0^1 \sqrt{10+4x^2}\, dx = \Big[y\Big]_0^2 \cdot \int_0^1 2\sqrt{\frac{5}{2}+x^2}\, dx$$

$$= 4\left[\frac{1}{2}\left(x\sqrt{x^2+\frac{5}{2}} + \frac{5}{2}\log\left|x+\sqrt{x^2+\frac{5}{2}}\right|\right)\right]_0^1$$

$$= 4\left(\frac{1}{2}\left(\sqrt{1+\frac{5}{2}} + \frac{5}{2}\log\left(1+\sqrt{1+\frac{5}{2}}\right)\right)\right) - 4\left(\frac{1}{2}\left(\frac{5}{2}\log\sqrt{\frac{5}{2}}\right)\right)$$

$$= \sqrt{14} + 5\log\frac{\sqrt{7}+\sqrt{2}}{\sqrt{5}}$$

（2） 定理 6.2.12 および定理 6.2.6 より，

$$\iint_D \sqrt{1+f_x^2+f_y^2}\, dxdy = \iint_D \sqrt{1+(2y)^2+(2x)^2}\, dxdy$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^2 \sqrt{1+4\sin^2\theta+4\cos^2\theta}\, rdrd\theta = \sqrt{5}\int_0^{2\pi} d\theta \cdot \int_0^2 r\, dr$$

$$= \sqrt{5}\Big[\theta\Big]_0^{2\pi} \cdot \left[\frac{1}{2}r^2\right]_0^2 = \sqrt{5}\cdot 2\pi \cdot \frac{1}{2}(4-0) = 4\sqrt{5}\pi$$

（3） 定理 6.2.12 および定理 6.2.6 より，

$$\iint_D \sqrt{1+f_x^2+f_y^2}\, dxdy = \iint_D \sqrt{1+\left(\frac{-x}{\sqrt{2-x^2-y^2}}\right)^2+\left(\frac{-y}{\sqrt{2-x^2-y^2}}\right)^2}\, dxdy$$

$$= \iint_D \sqrt{\frac{2}{2-x^2-y^2}}\, dxdy = \int_0^{2\pi}\int_0^{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{2}{2-r^2}}\, rdrd\theta$$

$$= \sqrt{2}\int_0^{2\pi} d\theta \cdot \int_0^{\sqrt{2}} \frac{r}{\sqrt{2-r^2}}\, dr = \sqrt{2}\Big[\theta\Big]_0^{2\pi} \cdot \Big[-\sqrt{2-r^2}\Big]_0^{\sqrt{2}} = \sqrt{2}\cdot 2\pi\cdot\sqrt{2} = 4\pi$$

問題 6.3

1. （1） $f(x,y)=y$ とおくと，$\displaystyle\int_C y\, dx = \int_0^1 f(t^2,t^2)(t^2)'dt = \int_0^1 t^2\, 2t\, dt = \int_0^1 2t^3\, dt = \left[\frac{1}{2}t^4\right]_0^1 = \frac{1}{2}$ である．同様に，$f(x,y)=x$ とおくと，$\displaystyle\int_C x\, dy = \int_0^1 f(t^2,t^2)(t^2)'dt = \frac{1}{2}$ である．

（2） $f(x,y)=y$ とおくと，$\displaystyle\int_C y\, dx = \int_0^1 f(t,t^2)(t)'dt = \int_0^1 t^2\, dt = \left[\frac{1}{3}t^3\right]_0^1 = \frac{1}{3}$ である．$f(x,y)=x$ とおくと，$\displaystyle\int_C x\, dy = \int_0^1 f(t,t^2)(t^2)'dt = \int_0^1 t\, 2t\, dt = \int_0^1 2t^2\, dt = \left[\frac{2}{3}t^3\right]_0^1 = \frac{2}{3}$ である．

（3） $f(x,y)=y$ とおくと，$\displaystyle\int_C y\, dx = \int_0^1 f(t,0)(t)'dt + \int_1^2 f(1,t-1)(1)'dt = \int_0^1 0\, dt + \int_1^2 0\, dt = 0$ である．$f(x,y)=x$ とおくと，$\displaystyle\int_C x\, dy = \int_0^1 f(t,0)(0)'dt + \int_1^2 f(1,t-1)(t-1)'dt =$

$\displaystyle\int_0^1 0\,dt + \int_1^2 dt = 0 + \Big[\, t \,\Big]_1^2 = (2-1) = 1$ である．

2. （1） $\displaystyle\int_C xdy - ydx = \int_0^{2\pi} \left(\cos t\,(\sin t)'dt - \sin t\,(\cos t)'\right) dt = \int_0^{2\pi} \left(\cos^2 t + \sin^2 t\right) dt = \int_0^{2\pi} dt$

$\displaystyle = \Big[\, t \,\Big]_0^{2\pi} = 2\pi$

（2） $\displaystyle\int_C xdy - ydx = \int_0^{2\pi} \frac{\cos t\ \sin t}{(\cos^2 t + \sin^2 t)^2}(\sin t)'dt = \int_0^{2\pi} \cos^2 t \sin t\,dt = \left[-\frac{1}{3}\cos^3 t\right]_0^{2\pi} = 0$

3. （1） 定理 4.2.9 を用いると，

$$\int_C xdy = \int_0^{2\pi} a\cos^3 t(a\sin^3 t)'dt = \int_0^{2\pi} a^2\cos^3 t\,3\sin^2 t\cos t\,dt$$

$$= 3a^2 \int_0^{2\pi} \cos^4 t\sin^2 t\,dt = 12a^2 \int_0^{\pi/2} \cos^4 t\sin^2 t\,dt$$

$$= 12a^2\,\frac{(4-1)!!\,(2-1)!!}{6!!}\,\frac{\pi}{2} = 12a^2\,\frac{3\cdot 1}{6\cdot 4\cdot 2}\,\frac{\pi}{2} = \frac{3}{8}\pi a^2$$

（2） $(x,y) = (a(1+\cos t)\cos t, a(1+\cos t)\sin t)$ である． $\displaystyle\int_0^{2\pi} \sin^2 t\cos t\,dt = \int_0^{2\pi} \cos^3 t\,dt = 0$，定理 4.2.8 と定理 4.2.9 を用いると，

$$\int_C xdy = \int_0^{2\pi} a(1+\cos t)\cos t(a(1+\cos t)\sin t)'dt$$

$$= a^2 \int_0^{2\pi} (1+\cos t)\cos t(-\sin^2 t + (1+\cos t)\cos t)dt$$

$$= a^2 \int_0^{2\pi} (\cos t + \cos^2 t)(-\sin^2 t + \cos^2 t + \cos t)dt$$

$$= a^2 \int_0^{2\pi} (-\sin^2 t\cos t + 2\cos^3 t + \cos^2 t - \sin^2 t\cos^2 t + \cos^4 t)dt$$

$$= 4a^2 \int_0^{\pi/2} (\cos^2 t - \sin^2 t\cos^2 t + \cos^4 t)dt$$

$$= 4a^2\left(\frac{1!!}{2!!}\,\frac{\pi}{2} - \frac{1!!\,1!!}{4!!}\,\frac{\pi}{2} + \frac{3!!}{4!!}\,\frac{\pi}{2}\right) = 2a^2\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{8} + \frac{3}{8}\right)\pi = \frac{3}{2}\pi a^2$$

（3） $(x,y) = (a\sqrt{|\cos 2t|}\,\cos t, a\sqrt{|\cos 2t|}\,\sin t)$ である．レムニスケートの右半分である $-\dfrac{\pi}{4} \le t \le \dfrac{\pi}{4}$ における曲線が囲む領域の面積を計算する．変数変換 $2t = \theta$ および定理 4.2.8 を用いると，

$$\int_C xdy = \int_{-\pi/4}^{\pi/4} a\sqrt{\cos 2t}\,\cos t(a\sqrt{\cos 2t}\,\sin t)'dt$$

$$= a^2 \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \sqrt{\cos 2t}\,\cos t(\sqrt{\cos 2t}\,\sin t)'dt$$

$$= a^2 \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \sqrt{\cos 2t}\,\cos t\left(\frac{-\sin 2t}{\sqrt{\cos 2t}}\,\sin t + \sqrt{\cos 2t}\,\cos t\right) dt$$

$$= a^2 \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \cos t\,(-\sin 2t\sin t + \cos 2t\cos t)\ dt$$

$$= a^2 \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \left(-\frac{1}{2}\sin^2 2t + \frac{1}{2}\cos^2 2t + \frac{1}{2}\cos 2t \right) dt$$

$$= a^2 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left(-\frac{1}{2}\sin^2 \theta + \frac{1}{2}\cos^2 \theta + \frac{1}{2}\cos \theta \right) \frac{d\theta}{2}$$

$$= \frac{a^2}{4} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left(-\sin^2 \theta + \cos^2 \theta + \cos \theta \right) d\theta$$

$$= \frac{a^2}{2} \int_{0}^{\pi/2} \left(-\sin^2 \theta + \cos^2 \theta + \cos \theta \right) d\theta$$

$$= \frac{a^2}{2} \left(-\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} + 1 \right) = \frac{a^2}{2}$$

4. C_1 と C_2 を A と B を結ぶ曲線とする．C_1 と C_2 は点 A, B 以外では交わらないと仮定し，C_1 と C_2 に囲まれる領域を D とする．D の境界 C は C_1 と，C_2 を逆に辿った曲線を繋いだ曲線とする．$P(x, y)$ と $Q(x, y)$ は $\mathbf{R}^2$ 上で C^1 級であることから，グリーンの定理（定理 6.3.2）より，

$$\left(\int_{C_1} P(x,y)dx + Q(x,y)dy \right) - \left(\int_{C_2} P(x,y)dx + Q(x,y)dy \right)$$

$$= \int_C P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \iint_D (Q_x(x,y) - P_y(x,y))dxdy = 0$$

となるので，

$$\left(\int_{C_1} P(x,y)dx + Q(x,y)dy \right) = \left(\int_{C_2} P(x,y)dx + Q(x,y)dy \right)$$

が成り立つ．C_1 と C_2 が点 A, B 以外でも交わる場合には，端点 A,B を固定したまま曲線 C_1 を C_2 の位置まで動かすことを考えると，有限個の曲線 $C_1', C_2', \ldots, C_n'$ で，$C_1 = C_1'$, $C_2 = C_n'$ であり，かつ，各 $i = 1, 2, \ldots, n-1$ について，C_i と C_{i+1} は点 A, B 以外では交わらないものを選ぶことができる．各 i に対して前半の議論を適用すれば，C_i に沿った積分値がすべて等しくなることが従う．

5. $P(x, y) = e^x + 2xy$, $Q(x, y) = e^{2y} + x^2$ とすると，これらは $\mathbf{R}^2$ 上で C^1 級であり，かつ，$P_y(x, y) = 2x$ と $Q_x(x, y) = 2x$ は一致する．よって，上の問題（問題 6.3.4）より，積分値は 2 点を結ぶ曲線の位置には依存しない．

6. $P(x, y) = \dfrac{-y}{x^2 + y^2}$, $Q(x, y) = \dfrac{x}{x^2 + y^2}$ とすると，$P_y(x, y) = \dfrac{-x^2 + y^2}{(x^2 + y^2)^2}$ と $Q_x(x, y) = \dfrac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2}$ は一致する．原点が C の外側にあるとき，C が囲む有界閉領域を D とすると，$P(x, y)$ と $Q(x, y)$ は D 上で C^1 級であり，グリーンの定理（定理 6.3.2）より，

$$\int_C P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \iint_D (Q_x(x,y) - P_y(x,y))dxdy = 0$$

が従う．原点が C の内側にあるとき，原点を中心とし，C の内側にある円 C' を考える．C 上の点 A と C' 上の点 B を線分 L で結び，A からスタートして C を反時計回りに 1 周し，線分 L を渡って B に行き，B から C' に沿って時計回りに 1 周し，線分 L を渡って A に戻る積分路を C'' とする．C と C'' を間の領域を有界閉領域 D' とすると，$P(x, y)$ と $Q(x, y)$ は D 上で C^1 級であり，グリーンの定理（定理 6.3.2）より，

$$0 = \iint_{D'} (Q_x(x,y) - P_y(x,y))dxdy = \int_{C''} P(x,y)dx + Q(x,y)dy$$

$$= \int_C P(x,y)dx + Q(x,y)dy + \int_L P(x,y)dx + Q(x,y)dy$$

$$- \int_{C'} P(x,y)dx + Q(x,y)dy - \int_L P(x,y)dx + Q(x,y)dy$$

$$= \int_C P(x,y)dx + Q(x,y)dy - \int_{C'} P(x,y)dx + Q(x,y)dy$$

となり，

$$\int_C P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int_{C'} P(x,y)dx + Q(x,y)dy$$

が従う．よって，C' に沿った線積分を求めればよい．C' を $r > 0$ と変数 $0 \leq t \leq 2\pi$ を用いて $(r\cos t, r\sin t)$ と表すと，

$$\int_{C'} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int_0^{2\pi} \left(\frac{-r\sin t}{r^2}(r\cos t)' + \frac{r\cos t}{r^2}(r\sin t)' \right) dt$$

$$= \int_0^{2\pi} \left(\sin^2 + \cos^2 t\right) dt = \int_0^{2\pi} dt = \Big[\, t \,\Big]_0^{2\pi} = 2\pi$$

となる．

問題 6.4

1. （１） $\displaystyle \lim_{n\to\infty} \iint_{K_n} xye^{x^2-y^2} dxdy = \lim_{n\to\infty} \int_{-n}^{n} xe^{x^2}dx \cdot \int_{-n}^{n} ye^{-y^2}dy = \lim_{n\to\infty} \left[\frac{1}{2}e^{x^2}\right]_{-n}^{n} \cdot \left[-\frac{1}{2}e^{-y^2}\right]_{-n}^{n}$

$$= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{2}(e^{n^2} - e^{(-n)^2})\right)\left(\frac{1}{2}(e^{-n^2} - e^{-(-n)^2})\right) = 0$$

（２） 例えば $K_n' = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid -n \leq x \leq 2n,\ -n \leq y \leq 2n\}$ とすると，

$$\lim_{n\to\infty} \iint_{K_n'} xye^{x^2-y^2} dxdy = \lim_{n\to\infty} \int_{-n}^{2n} xe^{x^2}dx \cdot \int_{-n}^{2n} ye^{-y^2}dy$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left[\frac{1}{2}e^{x^2}\right]_{-n}^{2n} \cdot \left[-\frac{1}{2}e^{-y^2}\right]_{-n}^{2n}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{2}(e^{(2n)^2} - e^{(-n)^2})\right)\left(-\frac{1}{2}(e^{-(2n)^2} - e^{-(-n)^2})\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{4}\left(e^{4n^2} - e^{n^2}\right)\left(e^{-n^2} - e^{-4n^2}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{4}\left(e^{3n^2} - 1 - 1 + e^{-3n^2}\right) = \infty$$

2. （１） $K_n = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid 0 \leq x \leq n,\ 0 \leq y \leq n\}$ とすると，

$$\iint_D e^{-x-y} dxdy = \lim_{n\to\infty} \int_0^n \int_0^n e^{-x-y} dxdy = \lim_{n\to\infty} \int_0^n e^{-x}dx \cdot \int_0^n e^{-y}dy$$

$$= \lim_{n\to\infty} \Big[-e^{-x}\Big]_0^n \cdot \Big[-e^{-y}\Big]_0^n = \lim_{n\to\infty} (-e^{-n}+1)^2 = 1$$

（２） 近似列を $K_n = \left\{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid \frac{1}{n} \leq x^2+y^2 \leq 1\right\}$ とし，$(x,y) = (r\cos\theta, r\sin\theta)$ とすると，

$$\iint_D \log(x^2+y^2) dxdy = \lim_{n\to\infty} \int_0^{2\pi} \int_{1/n}^1 \log r^2\, r dr d\theta = \lim_{n\to\infty} \int_0^{2\pi} d\theta \cdot \int_{1/n}^1 2r\log r\, dr$$

$$= \Big[\,\theta\,\Big]_0^{2\pi} \times \lim_{n\to\infty} \left(\Big[r^2\log r\Big]_{1/n}^1 - \int_{1/n}^1 r\, dr \right) = \lim_{n\to\infty} 2\pi \left(-\frac{1}{n^2}\log\frac{1}{n} - \left[\frac{1}{2}r^2\right]_{1/n}^1 \right)$$

$$= \lim_{n\to\infty} 2\pi \left(\frac{\log n}{n^2} - \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{n^2}\right) \right) = -\pi$$

3. （１） $x \geq 1$ において $e^{-x^2} \leq e^{-x}$ が成り立つ．$a > 1$ に対して

$$\int_1^a e^{-x^2}dx \leq \int_1^a e^{-x}dx \leq \int_1^\infty e^{-x}dx = \lim_{b\to\infty} \Big[-e^{-x}\Big]_1^b = \lim_{b\to\infty} (-e^{-b} + e^{-1}) = e^{-1}$$

が成り立つ．a を大きくすると左辺は単調に増加し，さらに上に有界であるため，ある実数に収束する．この実数を c_1 とする．$\displaystyle\int_0^1 e^{-x^2}dx$ は有界閉区間 $[0,1]$ 上の連続関数 e^{-x^2} の積分なので，積分可能である．この積分値を c_2 とする．このとき，広義積分 $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}dx$ の値は c_1+c_2 となるので，存在する．

（２） (1) より $\displaystyle\int_0^{\infty} e^{-x^2}dx$ が存在する．よって，定理 6.4.5 より，

$$\iint_{[0,\infty)\times[0,\infty)} e^{-x^2-y^2}dxdy = \left(\int_0^{\infty} e^{-x^2}dx\right)\left(\int_0^{\infty} e^{-y^2}dy\right) = \left(\int_0^{\infty} e^{-x^2}dx\right)^2$$

が成り立つ．左辺は

$$\iint_{[0,\infty)\times[0,\infty)} e^{-x^2-y^2}dxdy = \int_0^{\pi/2}\int_0^{\infty} e^{-r^2}\,rdrd\theta = \int_0^{\pi/2} d\theta\cdot\int_{0\infty} re^{-r^2}\,dr$$

$$= \Big[\theta\Big]_0^{\pi/2}\cdot\Big[-\frac{1}{2}e^{-r^2}\Big]_0^{\infty} = \frac{\pi}{2}\left(0+\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{4}$$

となる．よって，$\displaystyle\int_0^{\infty} e^{-x^2}dx = \sqrt{\frac{\pi}{4}} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ が従う．

4. （１） $(x,y)=(r\cos\theta, r\sin\theta)$ とすると，

$$\begin{aligned}\Gamma(p)\,\Gamma(q) &= 4\iint_{[0,\infty)^2} e^{-(x^2+y^2)}x^{2p-1}y^{2q-1}\,dxdy \\ &= 4\int_0^{\pi/2}\int_0^{\infty} e^{-r^2}r^{2p-1}\cos^{2p-1}\theta r^{2q-1}\sin^{2q-1}\theta\,rdrd\theta \\ &= 4\int_0^{\infty} e^{-r^2}r^{2(p+q)-1}\,dr\cdot\int_0^{\pi/2}\sin^{2q-1}\theta\cos^{2p-1}\theta\,d\theta\end{aligned}$$

より従う．

（２） 定理 4.3.17 (3) と例題 4.3.21 より，

$$\Gamma(p)\,\Gamma(q) = 2\int_0^{\infty} e^{-r^2}r^{2(p+q)-1}\,dr\cdot 2\int_0^{\pi/2}\sin^{2q-1}\theta\cos^{2p-1}\theta\,d\theta = \Gamma(p+q)B(q,p)$$

が成り立つ．ちなみに，定理 4.3.17 (1) により，最後の式は $\Gamma(p+q)B(p,q)$ と書くこともできる．

問題 7.1

1. （１） 定理 7.1.2 および例 7.1.1 より，$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1+2^n}{3^n} = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\left(\frac{1}{3}\right)^n+\left(\frac{2}{3}\right)^n\right) = \frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^n + \frac{2}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n$

$$= \frac{1}{3}\frac{1}{1-\frac{1}{3}} + \frac{2}{3}\frac{1}{1-\frac{2}{3}} = \frac{1}{3}\frac{3}{2}+\frac{2}{3}3 = \frac{5}{2}$$

（２） $\displaystyle\sum_{n=1}^{m}\frac{1}{n(n+1)} = \sum_{n=1}^{m}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right) = 1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{m}-\frac{1}{m+1} = 1-\frac{1}{m+1}$ より，

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)} = \lim_{m\to\infty}\sum_{n=1}^{m}\frac{1}{n(n+1)} = \lim_{m\to\infty}\left(1-\frac{1}{m+1}\right) = 1$$

2. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n} = \sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2^k+1}+\frac{1}{2^k+2}+\cdots+\frac{1}{2^k+2^k}\right) \geq \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{2} = \infty$ より発散する．補足として，問題文にある不等式は，具体的に書くと

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}+\cdots+\frac{1}{2^m}$$

$$> 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{2^m} + \cdots + \frac{1}{2^m}\right)$$

ということ．$m \to \infty$ とすると右辺は ∞ に発散するので，$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ も発散する．

3. （１） $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{n^4}{n^4+n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1+\frac{1}{n^2}} = 1 > 0$ であることから，定理 7.1.3 より $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^4}{n^4+n^2}$ は発散する．

（２） $\displaystyle\frac{n^2}{n^3+1} = \frac{1}{n+\frac{1}{n^2}} = \frac{1}{n}\left(\frac{1}{1+\frac{1}{n^3}}\right) \geq \frac{1}{2n}$ である．問題 7.1.2 より $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ は ∞ に発散するので，定理 7.1.7 (2) より，$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n^3+1}$ は発散する．

（３） $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} = \frac{1}{e} > 0$ であることから，定理 7.1.3 より $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^n$ は発散する．

（４） $\displaystyle\frac{1}{n^3} < \frac{1}{n(n+1)}$ であり，問題 7.1.1 (2) より $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ は 1 に収束する．よって，定理 7.1.7 (1) より，$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$ は収束する．

（５） $\displaystyle\frac{|\sin n|}{2^n} < \frac{1}{2^n}$ であり，例 7.1.1 より $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ は $\displaystyle\frac{1}{2}\frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 1$ に収束する．よって，定理 7.1.7 (1) より，$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\sin n|}{2^n}$ は収束する．

（６） $\log n < n$ より $\displaystyle\frac{1}{\log n} > \frac{1}{n}$ であり，問題 7.1.2 より $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ は ∞ に発散する．よって，定理 7.1.7 (2) より，$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\log n}$ は発散する．

4. （１） $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{2^{n+1}} \frac{2^n}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1+\frac{1}{n}}{2} = \frac{1}{2} < 1$ より収束する．

（２） $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2^{n+1}}{(n+1)!} \frac{n!}{2^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{n+1} = 0 < 1$ より収束する．

（３） $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!} \frac{n!}{n^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^n}{n!} \frac{n!}{n^n} = \lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e > 1$ より発散する．

5. （１） $\displaystyle\lim_{n\to\infty} (a_n)^{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \left(\left(\frac{n}{n+1}\right)^{-n^2}\right)^{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^{-n^2\times\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^{-n}$

$\displaystyle= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^n = \lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e > 1$ より発散する．

（２） $\displaystyle\lim_{n\to\infty} (a_n)^{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{3^n}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}\right)^{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{3}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2\times\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{3}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \frac{e}{3} < 1$ より収束する．

6. （１） $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{(-1)^{n-1}}{n^2}\right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < 1 + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(n-1)}$ であり，問題 7.1.1 (2) より右辺の収束する．よって，定理 7.1.7 (1) より $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2}$ は絶対収束する．

（2） $\left\{\dfrac{1}{n}\right\}$ は単調減少列であり，かつ，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$ を満たす．よって，ライプニッツの定理（定理 7.1.18）より，$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}$ は収束する．問題 7.1.2 より $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{(-1)^{n-1}}{n}\right|=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ は発散するので，$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}$ の収束は条件収束である．

7. （1） $\displaystyle S_m=\sum_{n=1}^{m}a_n$，$\displaystyle T_m=\sum_{n=1}^{m}a_n^k$，とおく．$\displaystyle\lim_{m\to\infty}S_m$ が収束することから，$\{S_m \mid m\in\mathbf{N}\}$ は上に有界である．上限を M とする．

$$T_m=\sum_{n=1}^{m}a_n^k\le\left(\sum_{n=1}^{m}a_n\right)^k\le M^k$$

より，$\{T_m \mid m\in\mathbf{N}\}$ も上に有界である．よって，単調増加列 $\{T_m\}$ は収束する．

（2） $\displaystyle S_m=\sum_{n=1}^{m}a_n$，$\displaystyle T_m=\sum_{n=1}^{m}b_n$ とおく．$\displaystyle U_m=\sum_{n=1}^{m}a_nb_n$ とおく．$\displaystyle\lim_{m\to\infty}S_m$ が収束することから，$\{S_m \mid m\in\mathbf{N}\}$ は上に有界である．上限を M とする．同様に，$\displaystyle\lim_{m\to\infty}T_m$ が収束することから，$\{T_m \mid m\in\mathbf{N}\}$ は上に有界である．上限を N とする．

$$U_m=\sum_{n=1}^{m}a_nb_n\le\left(\sum_{n=1}^{m}a_n\right)\left(\sum_{n=1}^{m}b_n\right)\le MN$$

より，$\{U_m \mid m\in\mathbf{N}\}$ も上に有界である．よって，単調増加列 $\{U_m\}$ は収束する．

問題 7.2

1. 以下，各問題のベキ級数の x^n の係数を a_n とする．

（1） 定理 7.2.2 より，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n+2}=1$

（2） 定理 7.2.2 より，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}=1$

（3） 定理 7.2.2 より，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{n!}{(n+1)!}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}=0$

（4） 定理 7.2.2 より，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^2 2^{n+1}}{n^2 2^n}=\lim_{n\to\infty}2\left(1+\frac{1}{n}\right)^2=2$

（5） 定理 7.2.2 より，

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt{n+2}-\sqrt{n+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})\frac{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}}{(\sqrt{n+2}-\sqrt{n+1})\frac{\sqrt{n+2}+\sqrt{n+1}}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n+1}}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n+2}+\sqrt{n+1}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{1+\frac{2}{n}}+\sqrt{1+\frac{1}{n}}}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1}=\frac{2}{2}=1$$

（6） 定理 7.2.6 より，

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\left(\frac{n-1}{n}\right)^{n^2\times\frac{1}{n}}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\left(\frac{n-1}{n}\right)^{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\left(1+\frac{1}{n}\right)=e$$

2. （1） 例 7.1.1 より，$|x|<1$ を満たす各 x について，$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}x^{n-1}=\frac{1}{1-x}$ が成り立つ．

（2） (1) の変数を $x=-t$ で置き換えると，$-1<t<1$ において

$$\frac{1}{1+t}=1-t+t^2-t^3+\cdots+(-t)^{n-1}+\cdots$$

が成り立つ．項別積分（定理 7.2.8）をすると，

$$\log(1+x) = \int_0^x \frac{dt}{1+t} = \int_0^x dt + \int_0^x -t\,dt + \cdots + \int_0^x (-t)^{n-1}\,dt + \cdots$$

$$= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + \cdots$$

が得られる．

（３） 定理 7.2.14 より，x^n の係数は

$$\binom{\frac{1}{2}}{n} = \frac{1}{n!}\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)\cdots\left(-\frac{2n-3}{2}\right) = \frac{(-1)^{n-1}}{n!}\frac{(2n-3)!!}{2^n} = \frac{(-1)^{n-1}(2n-3)!!}{(2n)!!}$$

であり，$x=0$ での $\sqrt{x+1}$ の値は 1 であるから，主張が従う．

（４） 定理 7.2.14 より，$\dfrac{1}{\sqrt{1+x}}$ のマクローリン展開の x^n の係数は

$$\binom{-\frac{1}{2}}{n} = \frac{1}{n!}\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)\left(-\frac{5}{2}\right)\cdots\left(-\frac{2n-1}{2}\right) = \frac{(-1)^n}{n!}\frac{(2n-1)!!}{2^n} = \frac{(-1)^n(2n-1)!!}{(2n)!!}$$

である．$\dfrac{1}{\sqrt{1-x}}$ のマクローリン展開は $\dfrac{1}{\sqrt{1+x}}$ のマクローリン展開の x を $-x$ に置き換えることで得られるので，その x^n の係数は

$$\frac{(-1)^n(2n-1)!!}{(2n)!!} \times (-1)^n = \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}$$

となる．よって主張が従う．

（５） (１) の変数を $x = -t^2$ で置き換えると，$-1 < t < 1$ において

$$\frac{1}{1+t^2} = 1 - t^2 + t^4 - \cdots + (-1)^{n-1}t^{2n-2} + \cdots$$

が成り立つ．項別積分（定理 7.2.8）をすると，

$$\arctan x = \int_0^x \frac{dt}{1+t^2} = \int_0^x dt - \int_0^x t^2\,dt + \int_0^x t^4\,dt - \cdots + \int_0^x (-1)^{n-1}t^{2n-2}\,dt + \cdots$$

$$= 1 - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{2n-1} + (-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \cdots$$

が得られる．（補足：$x=1$ を代入すると，$\dfrac{\pi}{4} = 1 - \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{5} - \dfrac{1}{7} + \cdots$ という，えっ本当！？という π の近似式を得る．）

（６） (４) の変数を x^2 に置き換えると，

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}x^{2n}$$

が成り立つ．項別積分（定理 7.2.8）をすると，

$$\arcsin x = \int_0^x \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}dt = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!\,(2n+1)}x^{2n+1}$$

が得られる．

3. （１） $f(x) = (x+1)^4$ とおくと，$f'(x) = 4(x+1)^3$, $f''(x) = 12(x+1)^2$, $f^{(3)}(x) = 24(x+1)$, $f^{(4)}(x) = 24$, $f^{(n)}(x) = 0$ （$n \geq 5$）である．よって，マクローリン展開は

$$(x+1)^4 = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n = 1 + \frac{4}{1!}x + \frac{12}{2!}x^2 + \frac{24}{3!}x^3 + \frac{24}{4!}x^5$$

$$= 1 + 4x + 6x^2 + 4x^3 + x^4$$

である．係数の数列は 0 に収束するので，定理 7.2.6 より収束半径は ∞ である．

（2） $f(x) = e^x$ とおくと，$f^{(n)}(x) = e^x$ が任意の n に対して成り立つ．よって，マクローリン展開は

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n$$

である．係数の数列を $\{a_n\}$ とすると，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{a_{n+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)!}{n!} = \lim_{n\to\infty} (n+1) = \infty$ となるので，定理 7.2.2 より収束半径は ∞ である．

（3） $f(x) = e^x$ とおくと，$f^{(n)}(x) = (-1)^n e^x$ が任意の n に対して成り立つ．よって，マクローリン展開は

$$e^{-x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} x^n$$

である．係数の数列を $\{a_n\}$ とすると，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)!}{n!} = \lim_{n\to\infty} (n+1) = \infty$ となるので，定理 7.2.2 より収束半径は ∞ である．

（4） $f(x) = \dfrac{1}{1+x}$ とおくと，$f^{(n)}(x) = (-1)^n n!(1+x)^{-n-1}$ が任意の n に対して成り立つ．よって，マクローリン展開は

$$\frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n n!}{n!} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n$$

である．$|x| < 1$ のとき，$\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} |(-1)^n x^n| = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$ より，$\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} |(-1)^n x^n|$ は絶対収束する．また，$|x| > 1$ のとき，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} |(-1)^n x^n| = \infty$ であるから，定理 7.1.3 より発散する．よって，収束半径は 1 である．

（5） $f(x) = \sin x$ とおくと，問題 3.4.4（2）より，$f^{(2k-1)}(0) = (-1)^{k-1}$, $f^{(2k)}(0) = 0$ である．よって，マクローリン展開は

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{(2k-1)!} x^{2k-1} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1}$$

である．この級数が絶対収束するかを調べる．

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left| \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1} \right| \le \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n$$

の右辺の級数に対してダランベールの判定法（定理 7.1.10）を用いると，

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{(n+1)!} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$$

より，固定した各 $x \in \mathbf{R}$ について級数が収束することが分かる．したがって，比較判定法（定理 7.1.7）より，各 $x \in \mathbf{R}$ について，級数 $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1}$ は絶対収束する．よって，定理 7.1.5 よりこの級数は収束する．収束半径は ∞ である．

（6） $f(x) = \sin x$ とおくと，問題 3.4.4（3）より，$f^{(2k-1)}(0) = 0$, $f^{(2k)}(0) = (-1)^k$ である．よって，マクローリン展開は

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k}$$

である．この級数が絶対収束するかを調べる．

$$\sum_{k=0}^{\infty}\left|\frac{(-1)^k}{(2k)!}x^{2k}\right| \leq \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{n!}x^n$$

であり，(5) と同様にして，各 $x \in \mathbf{R}$ について，級数 $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k)!}x^{2k}$ は絶対収束することが分かる．よって，定理 7.1.5 よりこの級数は収束する．収束半径は ∞ である．

4. （１） 問題 7.2.3 (2) の答え $e^x = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}x^n$ の x を $-x^2$ に置き換えればよい．よって，$e^{-x^2} = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}x^{2n}$ である．e^x の展開式は $\mathbf{R}$ 上の各点において収束するので，e^{-x^2} も $\mathbf{R}$ 上の各点において収束する．よって，収束半径は ∞ である．

（２） 問題 7.2.3 (2) の答え $e^x = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}x^n$ の x を $3x$ に置き換えて，さらに各項に x を掛ければよい．よって，$xe^{3x} = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}x(3x)^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{3^n}{n!}x^{n+1}$ である．e^x の展開式は $\mathbf{R}$ 上の各点において収束するので，e^{3x} も $\mathbf{R}$ 上の各点において収束する．また，x も $\mathbf{R}$ 上の各点において収束する．よって，問題 7.1.7 (2) より，xe^{3x} の展開式も $\mathbf{R}$ 上の各点において収束する．収束半径は ∞ である．

（３） 問題 7.2.2 (2) の答え $\log(1+x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n$ の x を $2x$ に置き換えればよい．よって，$\log(1+2x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}(2x)^n = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}2^n}{n}x^n$ である．$\log(1+x)$ の展開式は $|x| < 1$ において収束するので，$\log(1+2x)$ の展開式は $|x| < \dfrac{1}{2}$ において収束する．収束半径は $\dfrac{1}{2}$ である．

（４） 問題 7.2.2 (2) の答え $\log(1+x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n$ の x を x^2 に置き換えればよい．よって，$\log(1+x^2) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}x^{2n}$ である．$\log(1+x)$ の展開式は $|x| < 1$ において収束するので，$\log(1+x^2)$ の展開式は $|x^2| < 1$ において収束する．収束半径は 1 である．

（５） 問題 7.2.2 (2) の答え $\log(1+x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n$ の各項に x を掛けると，展開式 $\log(1+x)^x = x\log(1+x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}x^{n+1}$ が得られる．$\log(1+x)$ の展開式は $|x| < 1$ において収束し，x は $\mathbf{R}$ 上の各点において収束するので，問題 7.1.7 (2) より，$\log(1+x)^x$ の展開式は $|x| < 1$ において収束する．収束半径は 1 である．

（６） 問題 7.2.2 (2) の答え $\log(1+x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n$ の x を $-x$ に置き換えると，$\log(1-x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}(-x)^n = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{-1}{n}(-x)^n$ が得られる．よって，

$$\log\frac{1+x}{1-x} = \log(1+x) - \log(1-x) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{-1}{n}x^n$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty}\frac{2}{2k-1}x^{2k-1} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{2}{2k+1}x^{2k+1}$$

$\log(1+x)$ の展開式と $\log(1-x)$ の展開式は $|x|<1$ において収束するので，$\log\dfrac{1+x}{1-x}=\log(1+x)-\log(1-x)$ も $|x|<1$ において収束する．収束半径は 1 である．

5. $a_n=\dbinom{\alpha}{n}$ とおくと，定理 7.2.2 より収束半径は

$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}\cdot\frac{(n+1)!}{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)(\alpha-n)}\right|$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{n+1}{\alpha-n}\right|=\left|\frac{1+\frac{1}{n}}{\frac{\alpha}{n}-1}\right|=1$$

より 1 である．よって，項別微分（定理 7.2.9）により，この関数は開区間 $(-1,1)$ 上で C^∞ 級関数であり，任意の $n\in\mathbf{N}\cup\{0\}$ について定理の等式の左辺と右辺の n 次導関数の $x=0$ での値が一致すれば，等号が成立することになる．左辺と右辺の $x=0$ での値は共に 1 であり，一致する．$n>0$ のとき，左辺の n 次導関数の $x=0$ での値は

$$\frac{d^n}{dx^n}(1+x)^\alpha\bigg|_{x=0}=\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)$$

である．一方，右辺の n 次導関数の定数項は右辺の x^n の係数を $n!$ 倍したものになるので，

$$\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}\cdot n!=\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)$$

となり，左辺の n 次導関数の $x=0$ での値と一致する．よって，主張の等式が成り立つ．

問題 8.1

1. （1） まず，$y\neq 0$ における解を求める．$\dfrac{dy}{dx}=(2x+1)y$ を $\dfrac{1}{y}dy=(2x+1)dx$ と変形して，

$$\int\frac{1}{y}\,dy=\int(2x+1)\,dx$$

として両辺を積分すると，$\log|y|=x^2+x+C_0$ となる．よって，$|y|=e^{x^2+x+C_0}$ である．$|y|$ の絶対値を外し，$y=\pm e^{x^2+x+C_0}=\pm e^{C}e^{x^2+x}$ とする．$C=\pm e^{C_0}=C$ と置くと，$y=Ce^{x^2+x}$ と書ける．ここで，$C\neq 0$ である．$y=0$ のときは，$y'=0$ より，$y=0$ が解となる．これは $y=Ce^{x^2+x}$ の $C=0$ の場合に該当する．よって，求める解は $y=Ce^{x^2+x}$ $(C\in\mathbf{R})$ である．

（2） まず，$y\neq 0$ における解を求める．$x\dfrac{dy}{dx}+(2x^2-1)y=0$ を $\dfrac{1}{y}dy=\dfrac{1-2x^2}{x}dx$ と変形して，

$$\int\frac{1}{y}\,dy=\int\frac{1-2x^2}{x}dx=\int\left(\frac{1}{x}-2x\right)dx$$

として両辺を積分すると，$\log|y|=\log|x|-x^2$ となる．よって，$|y|=e^{\log|x|-x^2+C_0}=|x|e^{-x^2+C_0}$ である．$|x|$ および $|y|$ の絶対値を外し，$y=\pm e^{C_0}xe^{-x^2}$ とする．$C=\pm e^{C_0}$ と置くと，$y=Cxe^{-x^2}$ と書ける．ここで，$C\neq 0$ である．$y=0$ のときは，$y'=0$ より，$y=0$ が解となる．これは $y=Cxe^{-x^2}$ の $C=0$ の場合に該当する．よって，求める解は $y=Cxe^{-x^2}$ $(C\in\mathbf{R})$ である．

※ 以降の解答では，分母が 0 になる場合の場合分けは省略することにする．

（3） $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{x+y}{x-y}=\dfrac{1+\frac{y}{x}}{1-\frac{y}{x}}$ より，この微分方程式は同次形である．$t=\dfrac{y}{x}$ とおくと，微分方程式は

$$x\frac{dt}{dx}=\frac{1+t}{1-t}-t=\frac{1+t-t(1-t)}{1-t}=\frac{1+t^2}{1-t}$$

となる．これを $\dfrac{1-t}{1+t^2}dt=\dfrac{1}{x}dx$ と変形して，

$$\int\frac{1}{x}dx=\int\frac{1-t}{1+t^2}dt=\int\frac{1}{1+t^2}dt-\int\frac{t}{1+t^2}dt$$

として両辺を積分すると，

$$\log|x| = \arctan t - \frac{1}{2}\log(1+t^2) + C_0$$

が得られる．$t = \dfrac{y}{x}$ を代入すると，

$$\log|x| = \arctan\frac{y}{x} - \frac{1}{2}\log\left(1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2\right) + C_0$$

となるので，これを整理すると，$C = -2C_0$ として，

$$\log(x^2+y^2) = 2\arctan\frac{y}{x} + C$$

となる．

（4） $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x^2+y^2}{xy} = \dfrac{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}{\frac{y}{x}}$ より，この微分方程式は同次形である．$t = \dfrac{y}{x}$ とおくと，微分方程式は

$$x\frac{dt}{dx} = \frac{1+t^2}{t} - t = \frac{1+t^2-t^2}{t} = \frac{1}{t}$$

となる．これを $t\,dt = \dfrac{1}{x}dx$ と変形して，$\displaystyle\int t\,dt = \int \frac{1}{x}dx$ として両辺を積分すると，$\frac{1}{2}t^2 = \log|x| + C$ が得られる．$t = \dfrac{y}{x}$ を代入すると，$\dfrac{y^2}{2x^2} = \log|x| + C$ となるので，$y^2 = 2x^2(\log|x| + C)$ となる．

（5） 最初に斉次式 $\dfrac{dy}{dx} = -y$ を解く．$\displaystyle\int \frac{1}{y}dy = -\int dx$ として両辺を積分すると，$\log|y| = -x + C_0$ となる．よって，$|y| = e^{-x+C_0}$ であり，$C_1 = e^{C_0}$ とおくと，$y = C_1e^{-x}$ が得られる．次に定数変化法により $\dfrac{dy}{dx} = -y + x^2$ の解を求める．$y = C_1(x)e^{-x}$ とおくと，この式は $C_1'(x)e^{-x} - C_1(x)e^{-x} = -C_1(x)e^{-x} + x^2$ となるので，$C_1'(x) = x^2e^x$ が得られる．

$$C_1(x) = \int x^2e^x\,dx = x^2e^x - \int 2xe^x\,dx = x^2e^x - 2xe^x + \int 2e^x\,dx$$

$$= x^2e^x - 2xe^x + 2e^x + C = (x^2-2x+2)e^x + C$$

となるので，求める解は

$$y = ((x^2-2x+2)e^x + C)e^{-x} = x^2 - 2x + 2 + Ce^{-x}$$

となる．

（6） 最初に斉次式 $\dfrac{dy}{dx} = 2xy$ を解く．$\displaystyle\int \frac{1}{y}dy = 2x\,dx$ として両辺を積分すると，$\log|y| = x^2 + C_0$ となる．よって，$|y| = e^{x^2+C_0}$ であり，$C_1 = e^{C_0}$ とおくと，$y = C_1e^{x^2}$ が得られる．次に定数変化法により $\dfrac{dy}{dx} = 2xy + e^{x^2}$ の解を求める．$y = C_1(x)e^{x^2}$ とおくと，この式は $C_1'(x)e^{x^2} + 2xC_1(x)e^{x^2} = 2xC_1(x)e^{x^2} + e^{x^2}$ となるので，$C_1'(x) = 1$ が得られる．よって $C_1(x) = x + C$ となるので，求める解は $y = (x+C)e^{x^2}$ となる．

2. （1） $\dfrac{dy}{dx} = 2xy$ の解は，$\displaystyle\int \frac{1}{y}dy = 2x\,dx$ として両辺を積分すると，$\log|y| = x^2 + C_0$ となる．よって，$|y| = e^{x^2+C_0}$ であり，$C = e^{C_0}$ とおくと，$y = Ce^{x^2}$ となる．$x = 0$ を代入すると，$y = Ce^0 = C$ より，$C = 2$ である．よって求める解は $y = 2e^{x^2}$ である．

（２） 最初に斉次式 $\dfrac{dy}{dx}=y$ を解く．$\displaystyle\int\frac{1}{y}dy=dx$ として両辺を積分すると，$\log|y|=x+C_0$ となる．よって，$|y|=e^{x+C_0}$ であり，$C_1=e^{C_0}$ とおくと，$y=C_1e^x$ となる．次に定数変化法により $\dfrac{dy}{dx}=y+e^x$ の解を求める．$y=C_1(x)e^x$ とおくと，この式は $C_1'(x)e^x+C_1(x)e^x=C_1(x)e^x+e^x$ となるので，$C_1'(x)=1$ が得られる．よって $C_1(x)=x+C$ となるので，求める解は $y=(x+C)e^x$ となる．$x=2$ を代入すると，$y=(2+C)e^2=0$ となるので，$C=-2$ である．よって求める解は $y=(x-2)e^x$ である．

3. （１） $y'-2y=-2y^2$ より $n=2$ のベルヌーイの微分方程式である．$t=y^{1-2}=y^{-1}$ とおくと，求める微分方程式は $\dfrac{dt}{dx}-(-2)t=-(-2)$ より，$\dfrac{dt}{dx}+2t=2$ となる．$\displaystyle\int\frac{1}{1-t}dt=\int 2\,dx$ として両辺を積分すると，$-\log|1-t|=2x+C_0$ となる．よって，$|1-t|=e^{-2x-C_0}$ であり，$C_1=\pm e^{-C_0}$ とおくと，$1-t=C_1e^{-2x}$ となる．$t=y^{-1}$ を代入すると，$1-y^{-1}=C_1e^{-2x}$ であり，整理して，$C=-C_1$ とすると，$y=\dfrac{e^{2x}}{e^{2x}+C}$ となる．

（２） $y'-y=y^2e^x$ より $n=2$ のベルヌーイの微分方程式である．$t=y^{1-2}=y^{-1}$ とおくと，求める微分方程式は $\dfrac{dt}{dx}-(-1)t=-e^x$ より，$\dfrac{dt}{dx}+t=-e^x$ となる．最初に斉次式 $\dfrac{dt}{dx}+t=0$ を解く．$\displaystyle\int\frac{1}{t}dt=-dx$ として両辺を積分すると，$\log|t|=-x+C_0$ となる．よって，$|t|=e^{-x+C_0}$ であり，$C_1=e^{C_0}$ とおくと，$t=C_1e^{-x}$ となる．次に定数変化法により $\dfrac{dt}{dx}+t=-e^x$ の解を求める．$t=C_1(x)e^{-x}$ とおくと，この式は $C_1'(x)e^{-x}-C_1(x)e^{-x}+C_1(x)e^{-x}=-e^x$ となるので，$C_1'(x)=-e^{2x}$ が得られる．よって $C_1(x)=-\dfrac{1}{2}e^{2x}+C$ となるので，解は

$$t=\left(-\frac{1}{2}e^{2x}+C\right)e^{-x}=-\frac{1}{2}e^x+Ce^{-x}$$

となる．$t=y^{-1}$ を代入し，$C_2=2C$ とおくと，$y=\dfrac{2}{-e^x+Ce^{-x}}$ となる．

（３） $y'-2xy=y^2e^{-x^2}$ より $n=2$ のベルヌーイの微分方程式である．$t=y^{1-2}=y^{-1}$ とおくと，求める微分方程式は $\dfrac{dt}{dx}-(-2x)t=-e^{-x^2}$ より，$\dfrac{dt}{dx}+2xt=-e^{-x^2}$ となる．最初に斉次式 $\dfrac{dt}{dx}+2xt=0$ を解く．$\displaystyle\int\frac{1}{t}dt=-2xdx$ として両辺を積分すると，$\log|t|=-x^2+C_0$ となる．よって，$|t|=e^{-x^2+C_0}$ であり，$C_1=e^{C_0}$ とおくと，$t=C_1e^{-x^2}$ となる．次に定数変化法により $\dfrac{dt}{dx}+xt=e^{-x^2}$ の解を求める．$t=C_1(x)e^{-x^2}$ とおくと，この式は $C_1'(x)e^{-x^2}-2x\,C_1(x)e^{-x^2}+2x\,C_1(x)e^{-x^2}=-e^{-x^2}$ となるので，$C_1'(x)=-1$ が得られる．よって $C_1(x)=-x+C$ となるので，解は $t=(-x+C)e^{-x^2}$ となる．$t=y^{-1}$ を代入すると，$y=\dfrac{e^{x^2}}{-x+C}$ となる．

（４） $y'+\dfrac{y}{x}=y^4$ より $n=4$ のベルヌーイの微分方程式である．$t=y^{1-4}=y^{-3}$ とおくと，求める微分方程式は $\dfrac{dt}{dx}-3\dfrac{t}{x}=-3$ となる．最初に斉次式 $\dfrac{dt}{dx}-3\dfrac{t}{x}=0$ を解く．$\displaystyle\int\frac{1}{t}dt=\frac{3}{x}dx$ として両辺を積分すると，$\log|t|=3\log|x|+C_0$ となる．$C_0=\log C_1$ とおくと，$|t|=C_1\,|x|^3$ となる．次に定数変化法により $\dfrac{dt}{dx}-3\dfrac{t}{x}=-3$ の解を求める．$t=C_1(x)\,x^3$ とおくと，$C_1'(x)x^3+3x^2C_1(x)-3\,C_1(x)x^2=-3$ となるので，$C_1'(x)=-3x^{-3}$ が得られる．よって $C_1(x)=\dfrac{3}{2}x^{-2}+C_2$ となるので，解は

$$t=\left(\frac{3}{2}x^{-2}+C_2\right)x^3=\frac{3}{2}x+C_2x^3$$

となる．$t = y^{-3}$ を代入し，$C = 2C_2$ とすると，$y^3 = \dfrac{2}{3x + Cx^3}$ となる．

4. （1） $f(x,y) = 2x + 2y + 1$, $g(x,y) = 2x - 3y^2 + 3$ とおくと，$f_y(x,y) = 2$, $g_x(x,y) = 2$ は一致するので，微分方程式は完全形である．

$$F(x,y) = \int f(x,y)dx = x^2 + 2xy + x$$

$$G(x,y) = g(x,y) - F_y(x,y) = 2x - 3y^2 + 3 - 2x = -3y^2 + 3$$

より，

$$H(x,y) = F(x,y) + \int G(x,y)dy = x^2 + 2xy + x - y^3 + 3y - C$$

となる．よって，$x^2 + 2xy + x - y^3 + 3y = C$ が求める解である．

（2） $f(x,y) = e^x + y^2 - 2xy$, $g(x,y) = 2e^{2y} + 2xy - x^2$ とおくと，$f_y(x,y) = 2y - 2x$, $g_x(x,y) = 2y - 2x$ は一致するので，微分方程式は完全形である．

$$F(x,y) = \int f(x,y)dx = e^x + xy^2 - x^2y$$

$$G(x,y) = g(x,y) - F_y(x,y) = 2e^{2y} + 2xy - x^2 - 2xy + x^2 = 2e^{2y}$$

より，

$$H(x,y) = F(x,y) + \int G(x,y)dy = e^x + xy^2 - x^2y + e^{2y} - C$$

となる．よって，$e^x + xy^2 - x^2y + e^{2y} = C$ が求める解である．

5. $\tilde{f}(x,y) = \lambda(x)f(x,y)$, $\tilde{g}(x,y) = \lambda(x)g(x,y)$ とおくと，$\tilde{f}_y(x,y) = \lambda(x)f_y(x,y)$ および

$$\tilde{g}_x(x,y) = \lambda'(x)g(x,y) + \lambda(x)g_x(x,y) = \lambda(x)\,h(x)\,g(x,y) + \lambda(x)g_x(x,y)$$

$$= \lambda(x)(f_y(x,y) - g_x(x,y)) + \lambda(x)g_x(x,y) = \lambda(x)f_y(x,y)$$

より $\tilde{f}_y(x,y)$ と $\tilde{g}_x(x,y)$ は一致する．よって，$\lambda(x)$ は積分因子である．

6. $f(x,y) = xy - 1$, $g(x,y) = x^2 - xy$ とおくと，

$$\frac{f_y(x,y) - g_x(x,y)}{g(x,y)} = \frac{x - (2x - y)}{x^2 - xy} = \frac{y - x)}{x(x - y)} = -\frac{1}{x}$$

であり，これは変数 x のみの関数であるから，上の問題（問題 8.1.5）より，

$$\lambda(x) = \exp\left(\int -\frac{1}{x}dx\right) = e^{-\log|x|} = e^{\log\frac{1}{|x|}} = \frac{1}{|x|}$$

は積分因子である．$x > 0$ と仮定し，

$$\tilde{f}(x,y) = \frac{1}{x}(xy - 1) = y - \frac{1}{x}, \quad \tilde{g}(x,y) = \frac{1}{x}(x^2 - xy) = x - y$$

とおくと，

$$\tilde{F}(x,y) = \int \tilde{f}(x,y)dx = xy - \log x$$

$$\tilde{G}(x,y) = \tilde{g}(x,y) - \tilde{F}_y(x,y) = x - y - x = -y$$

より，

$$H(x,y) = \tilde{F}(x,y) + \int \tilde{G}(x,y)dy = xy - \log x - \frac{1}{2}y^2 - C_0$$

となる．よって，$xy - \log x - \dfrac{1}{2}y^2 = C_0$ が解である．$x < 0$ の場合は，

$$\tilde{f}(x,y) = \frac{1}{-x}(xy-1) = -y + \frac{1}{x}, \quad \tilde{g}(x,y) = \frac{1}{-x}(x^2 - xy) = -x + y$$

とおくと，

$$\tilde{F}(x,y) = \int \tilde{f}(x,y)dx = -xy + \log|x|$$

$$\tilde{G}(x,y) = \tilde{g}(x,y) - \tilde{F}_y(x,y) = -x + y - (-x) = y$$

より，

$$H(x,y) = \tilde{F}(x,y) + \int \tilde{G}(x,y)dy = -xy - \log|x| + \frac{1}{2}y^2 - C_1$$

となる．よって，$-xy - \log|x| + \dfrac{1}{2}y^2 = C_1$ が解である．$x > 0$ のとき $C = 2C_0$, $x < 0$ のとき $C = -2C_1$ とおくと，$2xy - 2\log|x| - y^2 = C$ が求める解である．

問題 8.2

1. （1） 定理 8.2.2 より，$y = C_0e^x + C_1e^{-2x}$

（2） 定理 8.2.2 より，$y = C_0e^{-x} + C_1xe^{-x}$

（3） 定理 8.2.2 より，$D^3 - 2D^2 + D = D(D-1)^2$ より，$y = C_0 + C_1e^x + C_2xe^x$

（4） $D^2 - 4D + 8 = 0$ の解は $2 \pm \sqrt{4-8} = 2 \pm \sqrt{-4} = 2 \pm 2i$ である．ここで i は虚数単位である．解を $a \pm bi$ とおいたとき, $a = 2, b = 2$ である．よって, 定理 8.2.4 より $y = A_0e^{2x}\cos 2x + B_0e^{2x}\sin 2x$ である．

2. （1） 例題 8.2.7 と同じ方針で解く．

$$y = \frac{-x}{D^2-1} = \frac{-x}{(D-1)(D+1)} = \frac{1}{D-1}\frac{-x}{D+1} = \frac{1}{D-1}e^{-x}\int(-x)e^x\,dx$$

$$= \frac{1}{D-1}e^{-x}\left(-xe^x + e^x + C_0\right) = \frac{1}{D-1}(1 - x + C_0e^{-x}) = e^x\int(1 - x + C_0e^{-x})e^{-x}\,dx$$

$$= e^x\int\left((1-x)e^{-x} + C_0e^{-2x}\right)\,dx = e^x\left(\left((x-1)e^{-x} + e^{-x} - \frac{C_0}{2}e^{-2x}\right) + C_1\right)$$

$$= x - \frac{1}{2}C_0e^{-x} + C_1e^x$$

となる．見栄えの問題で，$-\dfrac{1}{2}C_0$ を C_0 に置き直す．求める解は $y = x + C_0e^{-x} + C_1e^x$ である．

（2） 例題 8.2.7 の後に書いてある公式を使う．

$$y = \frac{e^x}{D^2+1} = \sin x\int e^x\cos x\,dx - \cos x\int e^x\sin x\,dx$$

である．ここで，$I_0 = \displaystyle\int e^x\cos x\,dx$ とおくと，

$$I_0 = e^x\cos x + \int e^x\sin x\,dx = e^x\cos x + e^x\sin x - \int e^x\cos x\,dx$$

$$= e^x(\cos x + \sin x) - I_0$$

より，$I_0 = \dfrac{1}{2}e^x(\cos x + \sin x) + C_0$ である．また，$I_1 = \displaystyle\int e^x\sin x\,dx$ とおくと，

$$I_1 = e^x\sin x - \int e^x\cos x\,dx = e^x\sin x - e^x\cos x - \int e^x\sin x\,dx$$

$$= e^x(\sin x - \cos x) - I_1$$

より，$I_1 = \dfrac{1}{2}e^x(\sin x - \cos x) + C_1$ である．よって解は

$$\begin{aligned} y &= I_0 \sin x - I_1 \cos x \\ &= \left(\frac{1}{2}e^x(\cos x + \sin x) + C_0\right)\sin x - \left(\frac{1}{2}e^x(\sin x - \cos x) + C_1\right)\cos x \\ &= \frac{1}{2}e^x + C_0 \sin x - C_1 \cos x \end{aligned}$$

となる．見栄えの問題で，$-C_1$ を $+C_1$ に置き直す．求める解は $y = \dfrac{1}{2}e^x + C_0 \sin x + C_1 \cos x$ である．

3. $(D^2 + 3D + 2)y = x$ より，

$$\begin{aligned} y &= \frac{x}{D^2+3D+2} = \frac{x}{(D+2)(D+1)} = \frac{1}{D+2}\frac{x}{D+1} = \frac{1}{D+2}e^{-x}\int xe^x\,dx \\ &= \frac{1}{D+2}e^{-x}(xe^x - e^x + C_0) = \frac{1}{D+2}(x - 1 + C_0e^{-x}) = e^{-2x}\int (x - 1 + C_0e^{-x})e^{2x}\,dx \\ &= e^{-2x}\int \left((x-1)e^{2x} + C_0e^x\right)\,dx = e^{-2x}\left(\frac{1}{2}(x-1)e^{2x} - \frac{1}{4}e^{2x} + C_0e^x + C_1\right) \\ &= \frac{1}{2}(x-1) - \frac{1}{4} + C_0e^{-x} + C_1e^{-2x} = \frac{1}{2}x - \frac{3}{4} + C_0e^{-x} + C_1e^{-2x} \end{aligned}$$

が解である．この式と $y' = \dfrac{1}{2} - C_0e^{-x} - 2C_1e^{-2x}$ に $x = 0$ を代入すると，

$$y(0) = -\frac{3}{4} + C_0 + C_1 = 0, \quad y'(0) = \frac{1}{2} - C_0 - 2C_1 = 1$$

より，$C_0 = 2, C_1 = -\dfrac{5}{4}$ が得られる．よって求める解は $y = \dfrac{1}{2}x - \dfrac{3}{4} + 2e^{-x} - \dfrac{5}{4}e^{-2x}$ である．

4. $f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n$ とする．$k \in \mathbf{N}$ について $\dfrac{d^k}{dx^k}e^{ax} = a^ke^{ax}$ が成り立つことから，

$$f(D)e^{ax} = a_0a^ne^{ax} + a_1a^{n-1}e^{ax} + \cdots + a_{n-1}ae^{ax} + a_ne^{ax} = f(a)e^{ax}$$

が成り立つ．$f(a)$ で割ると等式 $f(D)\left(\dfrac{e^{ax}}{f(a)}\right) = e^{ax}$ が得られるが，これは $y = \dfrac{e^{ax}}{f(a)}$ が微分方程式 $f(D)y = e^{ax}$ の解であることを意味する．よって，$\dfrac{1}{f(D)}e^{ax} = \dfrac{e^{ax}}{f(a)}$ が従う．

5. $y = (1 + aD + (aD)^2 + \cdots + (aD)^n)f(x)$ とおく．$f(x)$ が n 次の多項式であることから $D^{n+1}f(x) = 0$ が成り立つことに注意すると，

$$\begin{aligned} (1 - aD)y &= (1 - aD)(1 + aD + (aD)^2 + \cdots + (aD)^n)f(x) \\ &= (1 - (aD)^{n+1}f(x) = f(x) \end{aligned}$$

となる．つまり，y は微分方程式 $(1 - aD)y = f(x)$ の解である．よって，$\dfrac{f(x)}{1 - aD} = (1 + aD + (aD)^2 + \cdots + (aD)^n)f(x)$ が従う．